

»Mladi za napredek Maribora 2020«

37. srečanje

MEZOPOTAMSKA MATEMATIKA

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtorici: BRINA GALUF

NEJA TUŠ

Mentorici: MATEJA SLANA MESARIČ

SUZANA TOMŠIČ MAVRIČ

Maribor, februar 2020

»Mladi za napredek Maribora 2020«

37. srečanje

MEZOPOTAMSKA MATEMATIKA

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtorici: BRINA GALUF

NEJA TUŠ

Mentorici: MATEJA SLANA MESARIČ

SUZANA TOMŠIČ MAVRIČ

Maribor, februar 2020

KAZALO VSEBINE

KAZALO VSEBINE.....	2
KAZALO SLIK.....	3
KAZALO TABEL.....	3
KAZALO GRAFOV	3
POVZETEK	4
ABSTRACT	4
1 UVOD	5
1.1 RAZISKOVALNI PROBLEM.....	5
1.2 HIPOTEZE	5
1.3 TEORETIČNE OSNOVE	6
1.3.1 Mezopotamija	6
1.3.2 Mezopotamci in matematika	8
1.3.2.1 Zapis števil	8
1.3.2.2 Šestdesetiški številski sistem.....	9
1.3.2.3 Računanje v šestdesetiškem sistemu	12
1.3.2.4 Ulomki.....	13
1.3.2.5 Geometrija.....	14
1.3.2.6 Kvadratni koren.....	15
1.3.2.7 Enačbe	15
2 OSREDNJI DEL NALOGE.....	16
2.1 METODOLOGIJA	16
2.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov.....	16
2.1.2 Kazualno – neeksperimentalna metoda	16
2.1.3 Metoda analize podatkov in njihova interpretacija	16
2.1.4 Metoda praktičnega dela	16
2.2 OPIS REZULTATOV	17
2.2.1 Množenje.....	17
2.2.2 Deljenje	17
2.2.3 Diagonala kvadrata	18
2.2.4 Primerjava besedilnih nalog.....	20
2.2.5 Analiza reševanja besedilnih nalog.....	20
2.2.6 Izdelava glinenih ploščic.....	26
3 RAZPRAVA	27
4 ZAKLJUČEK.....	28
5 DRUŽBENA ODGOVORNOST.....	29

6 VIRI IN LITERATURA	30
6.1 PISNI VIRI.....	30
6.2 SPLETNI VIRI	30
7 PRILOGE	31
7.1 UČNI LIST Z MEZOPOTAMSKIMI NALOGAMI	31
7.2 UČNI LIST Z »DANAŠNJIMI NALOGAMI«.....	32

KAZALO SLIK

SLIKA 1: MEZOPOTAMIJA	6
SLIKA 2: ZIGURAT V MESTU UR – SVETIŠČE LUNINEGA BOGA NANE	7
SLIKA 3: MEZOPOTAMSKO ŠTETJE DO 60 S POMOČJO PRSTOV	10
SLIKA 4: ZNAK ZA ODŠTEVANJE »LAL«.....	11
SLIKA 5: ZAPIS ODŠTEVANJA 20 – 1	11
SLIKA 6: ŠTEVILO 16 V SEŠTEVALNEM ZAPISU.....	12
SLIKA 7: ŠTEVILO 16 V ODŠTEVALNEM ZAPISU.....	12
SLIKA 8: TABLICA PLIMPTON 322	14
SLIKA 9: TABLICA YBC 7289.....	18
SLIKA 10: TABLICA YBC 7289.....	19
SLIKA 11: DIAGONALA KVADRATA.....	19

KAZALO TABEL

TABELA 1: IZRAČUNAJ $27 \cdot 13$	17
TABELA 2: IZRAČUNAJ $125 : 5$	18
TABELA 3: IZRAČUN DOLŽINE DIAGONALE KVADRATA S STRANICO 30.....	19
TABELA 4: BESEDILNA NALOGA 1	21
TABELA 5: BESEDILNA NALOGA 2	22
TABELA 6: BESEDILNA NALOGA 3	23
TABELA 7: BESEDILNA NALOGA 4.....	24
TABELA 8: BESEDILNA NALOGA 5.....	25

KAZALO GRAFOV

GRAF 1: REŠEVANJE BESEDILNE NALOGE 1.....	21
GRAF 2: REŠEVANJE BESEDILNE NALOGE 2.....	22
GRAF 3: REŠEVANJE BESEDILNE NALOGE 3.....	23
GRAF 4: REŠEVANJE BESEDILNE NALOGE 4.....	24
GRAF 5: REŠEVANJE BESEDILNE NALOGE 5.....	25

POVZETEK

V naši raziskovalni nalogi smo se poglobili v matematiko starih Mezopotamcev. S pomočjo literature in pregleda ostalih pisnih virov smo proučili njihov način zapisovanja in reševanja računskih izrazov ter besedilnih nalog. Primerjali smo njihova odkritja v matematiki s podatki, ki jih imamo danes. Na podlagi pridobljenega znanja smo pripravili učne liste z nalogami, kot so jih reševali Mezopotamci, in jih preoblikovali na sodobnejši način. Učence osmih in devetih razredov smo prosili, da jih rešijo. Naloge so vključevale naslednje vsebine: linearne enačbe, sisteme linearnih enačb in Pitagorov izrek. S tem preizkusom smo ugotovili, kakšne težave so imeli današnji učenci pri matematičnih nalogah, ki so jih reševali naši predniki v Mezopotamiji. Namen naše raziskave je spoznati izvor načina reševanja matematičnih nalog ter razširiti naša obzorja v smislu logičnega mišljenja in reševanja računskih problemov.

KLJUČNE BESEDE: matematika, mezopotamci, šestdesetiški sistem, besedilne naloge

ABSTRACT

In our research paper we delved into the mathematics of the ancient Mesopotamians. With the help of literature and a review of other written sources, we have explored their way of writing and solving calculus and text tasks. We compared their discoveries in mathematics with the information we have today. On the basis of the acquired knowledge, we have prepared teaching lists with tasks as handled by the Mesopotamians and transformed in a more modern way. We asked the eighth and ninth grade students to solve them. The tasks included the following contents: linear equations, systems of linear equations, and Pythagoras theorem. With this test we found out what kind of problems today's students had in the mathematical problems that were solved by our ancestors in Mesopotamia. The purpose of our research is to learn the origins of the way mathematical problems are solved and to broaden our horizons in terms of logical thinking and solving calculus problems.

KEY WORDS: mathematics, Mesopotamians, sexagesimal system, text assignments

1 UVOD

Matematika nas v življenju spremlja že vse od ranega otroštva, saj nas odrasli popeljejo v svet števil, kakor hitro se naučimo govoriti. Poznavanje števil in osnovnih računskih operacij nam je postalo že tako samoumevno in vsakdanje, da se sploh ne zavedamo, kako velik pomen ima to za nas v vsakdanjem življenju. So se pa tega dobro zavedale stare civilizacije, katerih obstoj in kakovost življenja sta bila odvisna od njihove iznajdljivosti in spretnosti pri računanju. Navsezadnje bi tudi sami težko preživeli brez matematike. Kako zgraditi hiše, skuhati večerjo ... Menimo, da bi se morali ljudje po svetu bolj zavedati, kaj so iznašle stare civilizacije, saj so nam s tem pomagale pri življenju in dejavnostih, kot smo jih vajeni.

1.1 Raziskovalni problem

Mezopotamce smo spoznali pri pouku zgodovine, kjer nas je pritegnilo dejstvo, da so se veliko ukvarjali z matematiko. Tako je nastala ideja o raziskovalni nalogi, kjer smo želeli bolje spoznati razvoj matematike ter metode, s katerimi so si prebivalci starih civilizacij pomagali pri reševanju matematičnih problemov, s katerimi so se dnevno srečevali. Ob proučevanju virov smo naleteli na besedilne naloge, ki so jih reševali Mezopotamci. Prav zanimivo jih je bilo brati, saj so se pojavile težave z razumevanjem besedila. Bile so tako drugačne, kot jih poznamo danes. In prav to dejstvo je vodilo k ideji, da bi se s sošolci preizkusili v reševanju le-teh. Tako so se nam postavljala vprašanja:

- Ali bi učenci danes znali rešiti mezopotamske naloge ?
- Ali bi bila razlika v reševanju, če bi naloge bile zapisane v »današnji obliki«?

1.2 Hipoteze

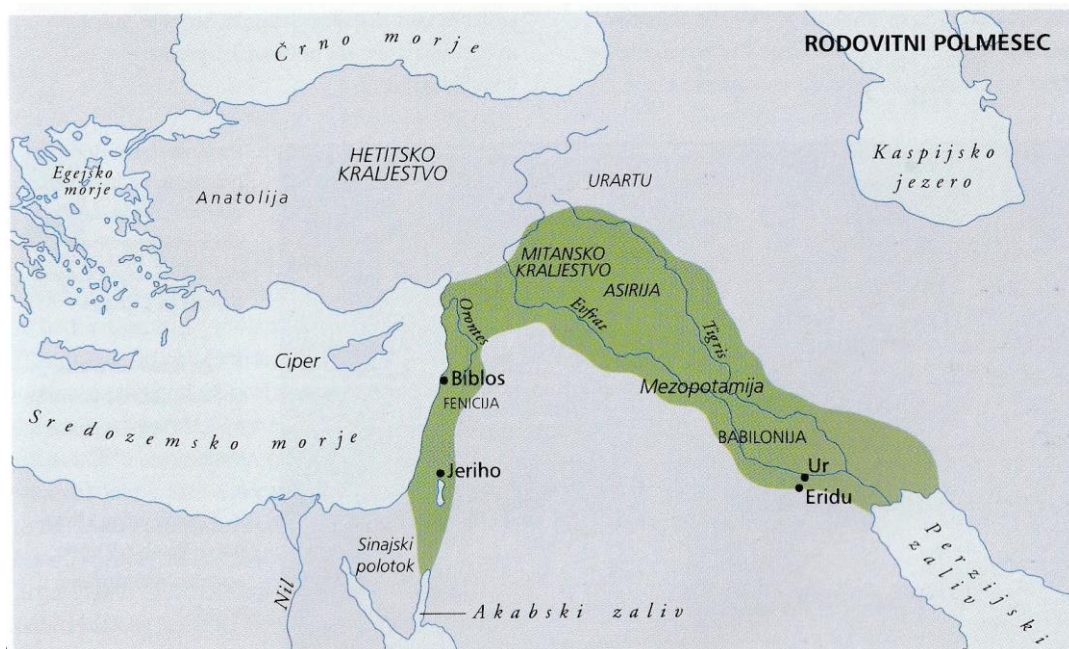
Glede na naša raziskovalna vprašanja smo si zastavili naslednji hipotezi:

1. Učenci bodo bolje reševali današnjo verzijo nalog kakor mezopotamsko.
2. Učenci bodo pogrešali enote v mezopotamskih nalogah.

1.3 Teoretične osnove

1.3.1 Mezopotamija

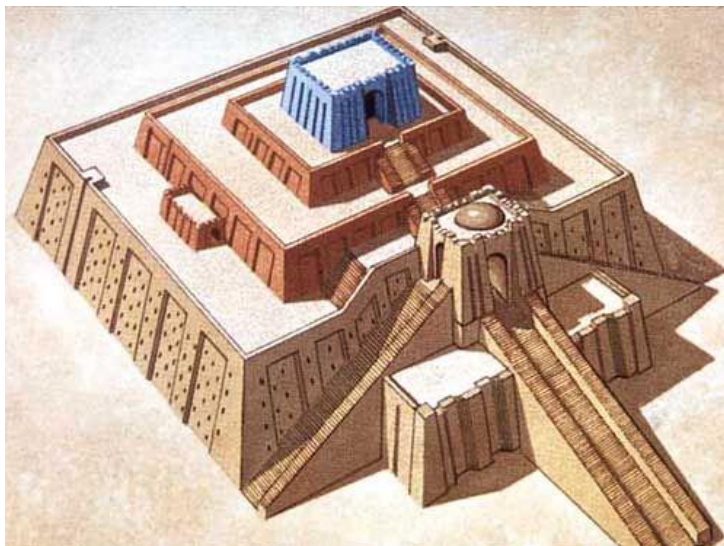
Splošno znano dejstvo je, da so se večje civilizacije že v preteklosti razvijale v bližini večjih rek, ki so omogočale hiter dostop do vode, namakanje polj, s pogostim poplavljanjem pa so odlagale plodno zemljo, ki so jo ljudje pridno izkoriščali ter obdelovali. Mezopotamija, znana tudi kot zibelka civilizacije, ni nobena izjema. Govorimo namreč o 80.000 km² velikem območju, ki zajema obsežno porečje rek Evfrat in Tigris in se ga je zaradi bogate obdelovalne zemlje prijel tudi ime rodovitni polmesec. V obdobju med 5000 pr. n. št. in 500 pr. n. št. so tukaj živela mnoga ljudstva oz. manjše poljedelske skupnosti, katerih kultura se je vedno bolj razvijala. Izpostavimo lahko Sumerce, Akadce, Asirce, še posebej pa Babilonce, saj je bil Babilon dolgo osrednje mesto v Mezopotamiji.



Slika 1: Mezopotamija

(Vir: Morkot, 2002, stran 9)

Mezopotamijo so sestavljale mestne državice, ki so imele svoja božanstva. Za njih so gradili tako imenovane zigurate (templji, zgrajeni v obliki terasaste stopničaste piramide), na vrhu katerih so bila svetišča.



Slika 2: Zigurat v mestu Ur – svetišče Luninega boga Nane

(Vir: <https://www.pinterest.se/pin/530580399840923733/>)

Zigurat je predstavljal versko, politično in upravno središče mestne državice. Vodilno vlogo so imeli svečeniki in iz njihovih vrst je izhajal tudi kralj. Združevanju urbanih središč oz. ustanovitvi prvih držav ter izgradnji mest primerno sledi tudi razvoj pisave. Mezopotamci so bili med prvimi kulturami, ki so se ponašali z razvito pisavo (klinopis), umetnostjo, arhitekturo, zakoniki, astronomijo, matematiko ...

Velikokrat se govori o babilonski ali asirsko-babilonski matematiki, saj so Babilonci tudi največ doprinesli k razvoju le-te. Razvili so številčni sistem, ki je temeljil na številu 60 in je še vedno v uporabi pri merjenju časa (sekunde in minute). K razvoju geometrije in astronomije je prav gotovo veliko doprinesla gradnja ziguratov ter namakalnih sistemov, ki so zahtevali določena znanja ter spretnosti.

Zapisovali so razne zapise, tako literarne kot pravne in tudi takšne z raznimi matematičnimi zapisi. Števila so zapisovali s klinopisno pisavo (ki se v slovenščini tako imenuje zaradi klinaste oblike znakov) na glinene ploščice, saj je bilo gline tam na pretek. Pisali so s priostrenimi trsnimi paličicami, ploščice pa so nato sušili na soncu, kasneje pa tudi žgali v posebnih pečeh.

Tovrstne ploščice so dandanes ključni zgodovinski vir pri proučevanju teh kultur. Samo v Nipurju so jih izkopali več kot 50000, danes pa so shranjene v raznih muzejih širom sveta. Večina odkritih tablic je iz obdobja 1800-1600 pr. n. št. (obravnavajo ulomke, algebro, kvadratne enačbe, Pitagorov izrek ...)

1.3.2 Mezopotamci in matematika

Določena matematična znanja so se razvijala predvsem s trgovskim knjigovodstvom, računstvom ter obračunavanjem raznih obresti in garancij ipd.

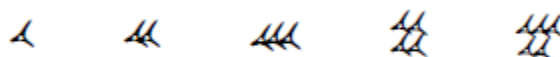
1.3.2.1 Zapis števil¹

Števila od 1 do 9 so zapisovali z ustreznim številom črtic, kjer je ena črtica imela obliko .

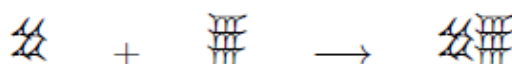


Vidimo, da so števila od 4 do 9 pisali tako, da so enico  nanizali v nadstropja.

Za število deset pa so uporabili novi znak , ki so ga ustrezno ponavljali tako, da so dobili desetiške večkratnike



Poznali so samo pet desetiških večkratnikov, saj so uporabljali seksagezimalni sistem oziroma šestdesetiški številski sistem. To je številski sistem z osnovo 60. Preostala števila do 59 so zapisovali z združitvijo desetic in enic ter takšno kombinacijo obravnavali kot en znak. Na primer, število $49 = 40 + 9$ so zapisali



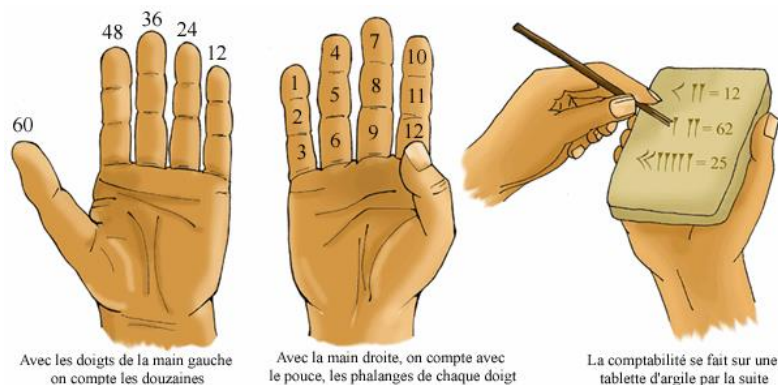
¹ Celotno poglavje 1.3.2.1 Zapis števil je citirano iz Razpet, M. (2015). *Babilonski zapis števil*. Dostopno na <http://www.pef.uni-lj.si/matwww/Babilonci.pdf>

Zapisi vseh mezopotamskih števil od 1 do 59 so zapisani v naslednji tabeli.

1		16		31		46	
2		17		32		47	
3		18		33		48	
4		19		34		49	
5		20		35		50	
6		21		36		51	
7		22		37		52	
8		23		38		53	
9		24		39		54	
10		25		40		55	
11		26		41		56	
12		27		42		57	
13		28		43		58	
14		29		44		59	
15		30		45			

1.3.2.2 Šestdesetiški številski sistem

Mezopotamci so šestdesetiški sistem sprejeli predvsem na podlagi njihovih visoko razvitih astronomskih opazanj. S tem sistemom so si pomagali tudi pri izdelavi koledarja, saj ima leto približno 360 dni, kar je $6 \cdot 60$, če pa krožnico razdelimo na 6 delov in nato vsakega od teh delov na 60 stopinj, dobimo toliko delov, kot je dni v letu. Uporablja se še danes za merjenje časa, kotov in geografskih koordinat. Predvidevajo, da je število 60 bilo izbrano zaradi njegove uporabnosti, saj ima kar 12 deliteljev: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 in 60 (medtem ko jih ima 100 samo 9). Zaradi tega lahko iz njega izpeljemo veliko enostavnih ulomkov, ki so jih na takšen način zapisovali še dolgo po uvedbi desetiškega sistema. Tudi s pomočjo prstov lahko štejemo do 60. Slika prikazuje, da nam je v pomoč 12 členkov prstov ene roke in 5 prstov na drugi roki.



Slika 3: Mezopotamsko štetje do 60 s pomočjo prstov

(Vir: <https://phillips.blogs.com/.a/6a00d834515c6d69e2017c3742a488970b-pi>)

Poljubno naravno število so zapisali kot linearno kombinacijo potenc števila 60:

$$a = a_n \cdot 60^n + \dots + a_1 \cdot 60 + a_0$$

Pri tem so koeficienti $a_n, \dots, a_1, a_0$ cela števila od 0 do 59 in jim lahko rečemo števke. Le-te število a enolično določajo, če jih navedemo v dogovorjenem zaporedju in pišemo:

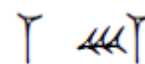
$$a = a_n \dots a_1 a_0$$

Števila 0 niso poznali. Tako so v zapisu namesto števila 0 pustili prazen prostor, kar pa je lahko vodilo v nesporazume, saj je manjši prazen prostor bil tudi med števki.

Primeri:

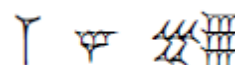
Število 91: $91 = 1 \cdot 60 + 31$

po mezopotamsko



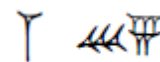
Število 3899: $3899 = 1 \cdot 60^2 + 4 \cdot 60 + 59$

po mezopotamsko



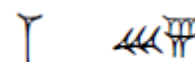
Število 95: $95 = 1 \cdot 60 + 35$

po mezopotamsko

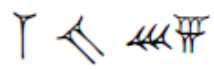


Število 3635: $3635 = 1 \cdot 60^2 + 35$

po mezopotamsko



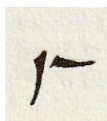
Opazimo, da imata števili 95 in 3635 podobna zapisa, razlikujeta se le v dolžini presledka med števki. V primeru števila 95 presledek ločuje števki, v primeru števila 3635 pa je sicer večji presledek, ki označuje odsotnost 60^1 .

Kasneje so zaradi dvoumnosti presledkov uvedli znak za število 0. Po mezopotamsko  ali , ki pa je dolgo imel le vlogo zapolnjevanja praznega prostora. Torej bi število 3635 zapisali .

(povzeto po članku Babilonski zapis števil)

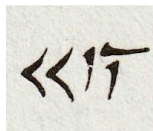
Takšnemu zapisu števil pravimo tudi seštevalni, saj se znaki, ki si sledijo pri zapisu, seštevajo.

Mezopotamci so imeli z vklesavanjem v ploščice veliko dela, zato so si ga želeli olajšati z zapisovanjem manjšega števila simbolov. Tako so pogosto predvsem v besedilih o trgovskih transakcijah uporabljali tudi odštevalni zapis števil. Pri uporabi tovrstnega zapisa pa so uporabljali znamenje, ki so ga poimenovali »lal«, pomenil pa je »odvzeti«, uporabljali pa so ga tudi v vlogi predznaka minus.



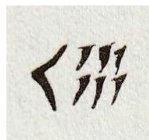
Slika 4: Znak za odštevanje »lal« (Vir: Devid, 1984, stran 62)

Znamenje »lal« je imelo podobno vlogo kakor zapisovanje znamenj za manjše število pred znamenje za večje pri rimskih številih. Na sliki 5 vidimo primer zapisa števila 19, ki so ga zapisali v obliki »dvajset manj ena«, kar bi danes zapisali kot 20-1 (vrednost je v vsakem primeru enaka 19).



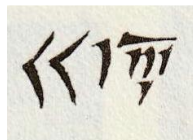
Slika 5: Zapis odštevanja 20 – 1 (Vir: Devid, 1984, stran 62)

Odštevalni zapis so uporabljali le pri določenih številih, kjer se jim je to splačalo. Na primer, za število 16 so v seštevalnem zapisu potrebovali 7 znakov, v odštevalnem pa bi jih potrebovali 8 (torej več), kar se jim ni splačalo. V takšnih primerih so se raje držali »klasičnega« seštevalnega zapisa.



Slika 6: Število 16 v seštevalnem zapisu

(Vir: Devid, 1984, stran 62)



Slika 7: Število 16 v odštevalnem zapisu

(Vir: Devid, 1984, stran 62)

1.3.2.3 Računanje v šestdesetiškem sistemu

Moramo razumeti, da je bilo pisanje klinopisa zelo zamudno, zato so večinoma računali na pamet. Pri nekaterih bolj zapletenih aritmetičnih postopkih pa so si mezopotamski matematiki pomagali z najrazličnejšimi tabelami. Med drugim so si sestavili tabele kvadratnih korenov, vsote kvadrata in kuba števila. Pogosto so si pomagali tudi s tablicami recipročnih vrednosti, pri katerih gre načeloma za tabele, ki bi danes izgledale tako:

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10 itd.

Zmnožek števil iz prvega stolpca z ustreznim številom iz drugega je bil tako vedno enak 60.

1.3.2.4 Ulomki

Babilonci so znali zapisovati tudi ulomke. Zapisovali so jih kot šestdesetiške (podobno kot mi v desetiškem sistemu zapisujemo decimalne ulomke), na primer:

$$\frac{1}{60}, \quad \frac{31}{60^2}, \quad \frac{59}{60^3}$$

In tako tudi realna števila:

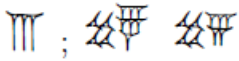
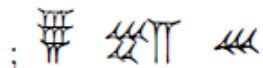
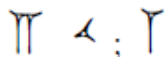
$$a = a_n \cdot 60^n + \dots + a_1 \cdot 60 + a_0 + \frac{a_{-1}}{60} + \frac{a_{-2}}{60^2} + \frac{a_{-3}}{60^3} + \dots$$

Mestni zapis števila a je potem $a = a_n a_1 \dots a_0 ; a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$

Pri tem so $a_n, a_1, \dots, a_0; a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$ cela števila od 0 do 59, razporejena točno v takem vrstnem redu, kot smo ga zapisali. Ni znano, ali so uporabljali poseben znak, ki bi ustrezal naši decimalni vejici, mi smo uporabili podpičje zaradi boljše preglednosti. (Razpet, M., 2015)

.

Primeri:

Ulomek $\frac{911}{240}$:	$\frac{911}{240} = 3 + \frac{47}{60} + \frac{45}{60^2}$	po mezopotamsko	
Ulomek $\frac{71}{480}$:	$\frac{71}{480} = \frac{8}{60} + \frac{52}{60^2} + \frac{30}{60^3}$	po mezopotamsko	
Ulomek $\frac{7801}{600}$:	$\frac{7801}{600} = 2 \cdot 60 + 10 + \frac{1}{60}$	po mezopotamsko	

1.3.2.5 Geometrija

Merili so dolžino in 1 babilonska milja je merila okoli 11,3 km, kar je približno 7 današnjih milj. Zanimivo je, da so poznali pravila za računanje nekaterih prostornin in plosčin. Na primer, prostornino valja so računali kot zmnožek osnovne ploskve in višine. Obseg kroga so računali kot tri njegove premere, ploščino pa kot $\frac{1}{12}$ kvadrata premera. To bi bilo res, če bi bilo število π enako 3.

Poznali so tudi splošni primer Pitagorovega izreka, torej že v 6 stol. pr. n. št.. Osnovna formula Pitagorovega izreka je $c^2 = a^2 + b^2$. Če imamo v pravokotnem trikotniku podano dolžino stranic a in b , lahko izračunamo dolžino stranice c . Za Mezopotamce je zapis izražal zvezo med ploščinami treh kvadratov, in ne med dolžinami treh stranic. Pri tem je znana tablica Plimpton 322, ki vsebuje 15 vrstic zapisanih števil v šestdesetiškem sistemu in ki predstavlja seznam pitagorejskih trojic.

Predvidevajo, da so poznali celo parametrsko ponazoritev trojic:

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2 \ll (\text{Devide, 1984, stran 64})$$



Slika 8: Tablica Plimpton 322

(Vir: <https://apodyoptes.com/2018/05/20/plimpton-322-i-pinakida-pou-ksanagrafei-istoria/>)

1.3.2.6 Kvadratni koren

Poznali so kvadratni koren pozitivnega celega števila. Računali so ga po obrazcu:

$$\sqrt{a} = \sqrt{(b^2 + c)} = b + \frac{c}{2b},$$

če a pomeni dano pozitivno celo število, b število, katerega kvadrat je najbližji številu a , c pa razliko od najbližjega kvadrata do števila a .

Primer: $\sqrt{1700}$

$$1700 = 1600 + 100 = 40^2 + 100$$

$$\sqrt{1700} = \sqrt{(40^2 + 100)} = 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 40 + \frac{10}{8} = 41\frac{1}{4} = 41,25$$

1.3.2.7 Enačbe

Mezopotamci so na podlagi konkretnih problemov reševali tako linearne kot tudi druge, zahtevnejše enačbe, npr. kvadratne in kubične s pozitivnimi koeficienti. Dobri so bili tudi v reševanju sistemov linearnih enačb. Ločevali so določene tipe enačb, vendar pa niso poznali ničle in negativnih števil, zato so kot rezultat upoštevali le pozitivna števila. Kot nadgradnjo algebre pa so že takrat razvili t. i. verbalno algebro – metodo za reševanje besedilnih nalog.

V nadaljevanju sledijo primeri reševanja besedilnih nalog.

2 OSREDNJI DEL NALOGE

2.1 Metodologija

Uporabili smo naslednje metode dela:

- metodo proučevanja pisnih virov,
- kavzalno – neeksperimentalno metodo,
- metodo analize podatkov in njihovo interpretacijo in
- metodo praktičnega dela.

2.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov

Začetna metoda dela je bila metoda dela s pisnimi viri. Literaturo smo najprej iskali v šolski knjižnici, Mariborski knjižnici in Univerzitetni knjižnici Maribor. Iskali smo tudi na spletu. Zbrane materiale smo proučili, prebrali in se pogovorili o njihovi vsebini. Ugotovitve smo nato povzeli in uskladili.

2.1.2 Kavzalno – neeksperimentalna metoda

To metodo smo uporabili v osrednjem delu raziskave, da bi ugotovili, kako uspešni so današnji učenci pri reševanju takratnih matematičnih nalog. S sošolci smo se preizkusili v reševanju mezopotamskih nalog in »prevedenih nalog«, zapisanih kot jih rešujemo danes.

2.1.3 Metoda analize podatkov in njihova interpretacija

Pregledali smo rešene naloge in napravili analizo. Zbrane podatke o reševanju nalog smo uredili. Pri tem smo uporabljali osebni računalnik in program Microsoft Word in Excel. Podatke smo interpretirali v obliki tabel in grafov ter podali ugotovitve.

2.1.4 Metoda praktičnega dela

To metodo smo uporabili pri izdelavi »mezopotamskih ploščic« iz gline. Postavili smo se v vlogo Mezopotamcev, da bi vsaj malo občutili, kako so pisali.

2.2 Opis rezultatov

Pri proučevanju pisnih virov smo spoznali, da so Mezopotamci bili odlični matematiki. Svoje znanje na področju matematike so tako dobro razvili predvsem zaradi lastnih potreb v vsakdanjem življenju. Neverjetno je, da so si pri gradnji in podobnih stvareh pomagali že skorajda 2000 let pred Pitagorom. Presenetljiva pa je tudi natančnost njihovega izračuna za koren števila 2, saj se z današnjim ujema v prvih petih decimalkah, kar je izjemen približek. Ugotovitve podajamo kot primerjavo nekoč in danes v obliki tabel.

2.2.1 Množenje

Pri množenju so si pomagali z uporabo formule

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \quad \text{ali} \quad ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

Primer: Izračunaj $27 \cdot 13$.

Tabela 1: Izračunaj $27 \cdot 13$

MEZOPOTAMCI	$27 \cdot 13 = \frac{(27 + 13)^2 - (27 - 13)^2}{4} = \frac{40^2 - 14^2}{4} = \frac{1600 - 196}{4} = 351$
DANES	$\begin{array}{r} 27 \cdot 13 \\ 27 \\ \hline 81 \\ 351 \end{array}$

2.2.2 Deljenje

Delili so podobno kot mi delimo ulomke še danes. Množili so namreč z obratno vrednostjo:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Primer: Izračunaj $125 : 5$.

Tabela 2: Izračunaj $125 : 5$

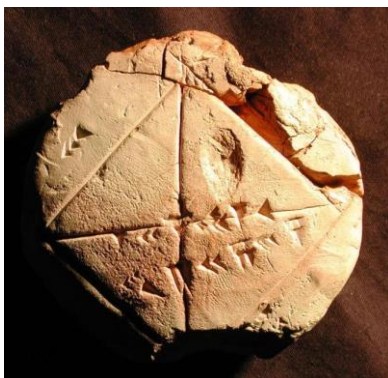
MEZOPOTAMCI	$125 : 5 = 125 \cdot \frac{1}{5} = 25$
DANES	$125 : 5 = 25$ 25 0

2.2.3 Diagonala kvadrata

Ploščica YBC7289 priča o tem, da so poznali tudi racionalni približek za koren števila 2. Na diagonali kvadrata je zapisana približna vrednost kvadratnega korena števila 2. S pravo vrednostjo $\sqrt{2}$ se namreč ujema v prvih petih mestih za decimalno vejico:

$$\text{mezopotamsko: } 1; 24, 51, 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296$$

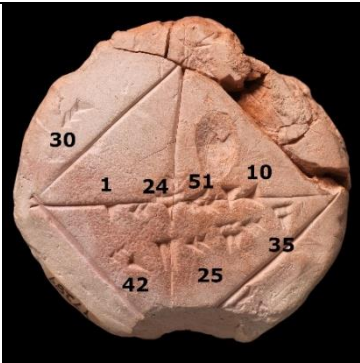
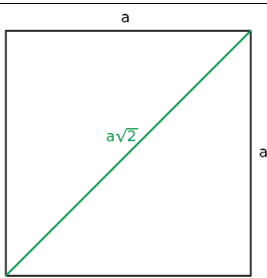
$$\text{danes: } \sqrt{2} = 1,41421356$$



Slika 9: Tablica YBC 7289

(Vir: <https://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc7289-3.html>)

Tabela 3: Izračun dolžine diagonale kvadrata s stranico 30

MEZOPOTAMCI	 Slika 10: Tablica YBC 7289 (Vir: https://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc7289-3.html)	Diagonala kvadrata s stranico 30: $42; 25, 35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42,4263888$
DANES	 Slika 11: Diagonala kvadrata (Vir: http://www2.linnaeus.uu.se/online/matematik/2_0.html)	Diagonala kvadrata s stranico 30: $d = a\sqrt{2} = 30 \cdot \sqrt{2} = 42,4264068$

2.2.4 Primerjava besedilnih nalog

Pri branju nalog iz mezopotamskih časov nam najprej pride na misel, da so uporabno naravnane, iz vsakdanjega življenja. Temeljile so na gospodarski tematiki.

Danes so nam takšne naloge tudi težje razumljive, saj so zapisane popolnoma drugače kot danes. Pri tem mislimo na podajanje podatkov brez enot in vrstni red podatkov (ključni podatki za rešitev naloge so napisani na koncu).

Velika razlika je tudi v samem reševanju nalog. Takrat so reševali z zapisom na glino, klinopisom, kar je bilo veliko bolj zamudno kakor danes, ko naloge rešujemo z zapisom v zvezek. Zaradi tega so veliko računali na pamet. Pri tem so si pomagali z rokami in že vnaprej pripravljenimi preglednicami določenih števil.

2.2.5 Analiza reševanja besedilnih nalog

Mezopotamske naloge so se nam zdele zelo zanimive, vendar presenetljivo zahtevne, zato smo se odločili tudi sami preizkusiti v reševanju le-teh. Učencem osmega in devetega razreda smo ponudili izziv rešiti 5 mezopotamskih nalog. Veliko je nalog iz različnih področij matematike, zato smo se odločili za tiste, katerih vsebine so primerne za osnovnošolce in smo jih že obravnavali pri pouku.

Vsebine, ki smo jih vključili v reševanje:

- linearne enačbe,
- sistemi linearnih enačb,
- Pitagorov izrek.

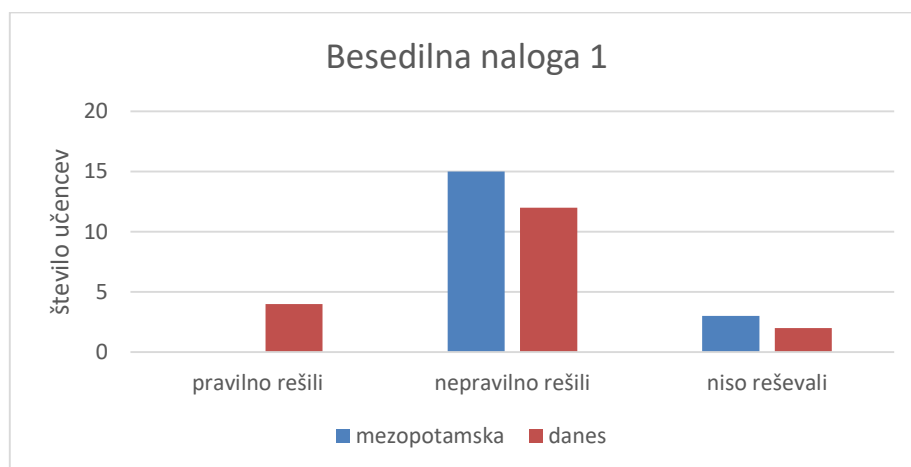
Pričakovali smo, da bodo učenci imeli težave pri razumevanju mezopotamskih nalog, zato smo naloge tudi »prevredli v današnji čas«. Zapisali smo jih v obliko, ki je nam bolj razumljiva in smo je navajeni. Tako so učenci dvakrat reševali enake naloge, vendar drugače zapisane. Zanimalo nas je, ali bo učencem lažje rešiti »sodobnejše naloge«.

Naloge je reševalo skupno 18 učencev. Rezultate podajamo primerjalno v tabelah in grafih.

Tabela 4: Besedilna naloga 1

MEZOPOTAMCI	Seštej: Vsoto dolžine in širine, za 10 povečano dolžino in za 15 povečano širino. Peti del tega je 25. Dolžina je 30. Kolikšna je širina?
DANES	Dolžina je 30. Vsoti dolžine in širine prištej za 10 povečano dolžino in za 15 povečano širino. Petina celotne vsote je 25. Kolikšna je širina?
REŠITEV	$\text{širina} = x$ $\frac{1}{5} \cdot ((30 + x) + (30 + 10) + (x + 15)) = 25$ $x = 20$

Graf 1: Reševanje besedilne naloge 1

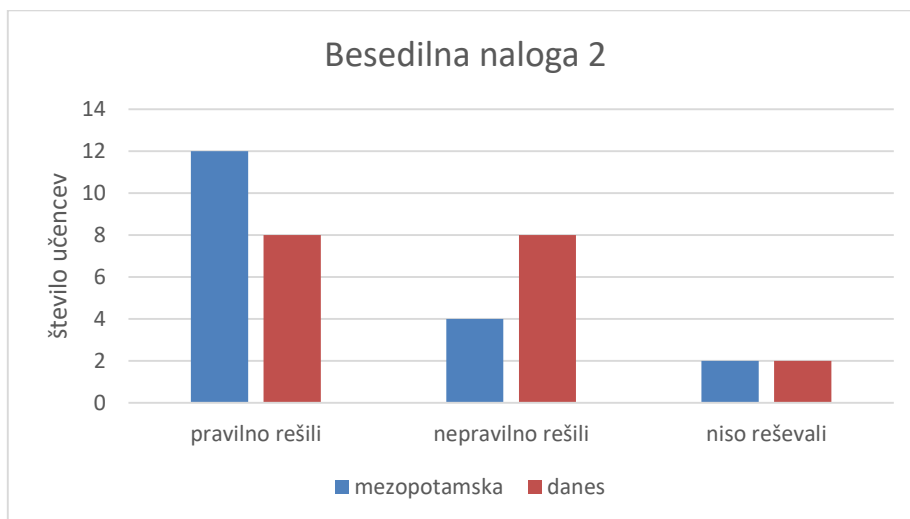


Večina učencev se je lotila reševanja te mezopotamske naloge, vendar je nihče ni rešil pravilno. Bolje jim je šlo reševanje današnje različice naloge, saj so jo pravilno rešili kar 4 učenci. Predvidevamo, da so se učenci lažje lotili reševanja naloge, ki je zapisana v njim bolj »domačem« načinu.

Tabela 5: Besedilna naloga 2

MEZOPOTAMCI	Dolžina in četrtna širine (pravokotnika) sta skupaj 7 dlani. Dolžina in širina skupaj sta 10 dlani. Koliko dlani je širina in koliko dolžina?
DANES	Dolžina in četrtna širine pravokotnika skupaj merita 7 enot, dolžina in celotna širina pa 10 enot. Koliko enot meri širina in koliko dolžina?
REŠITEV	$x + \frac{1}{4}y = 7$ $x + y = 10$ Širina: $y = 4 \text{ dlani}$ Dolžina: $x = 6 \text{ dlani}$

Graf 2: Reševanje besedilne naloge 2

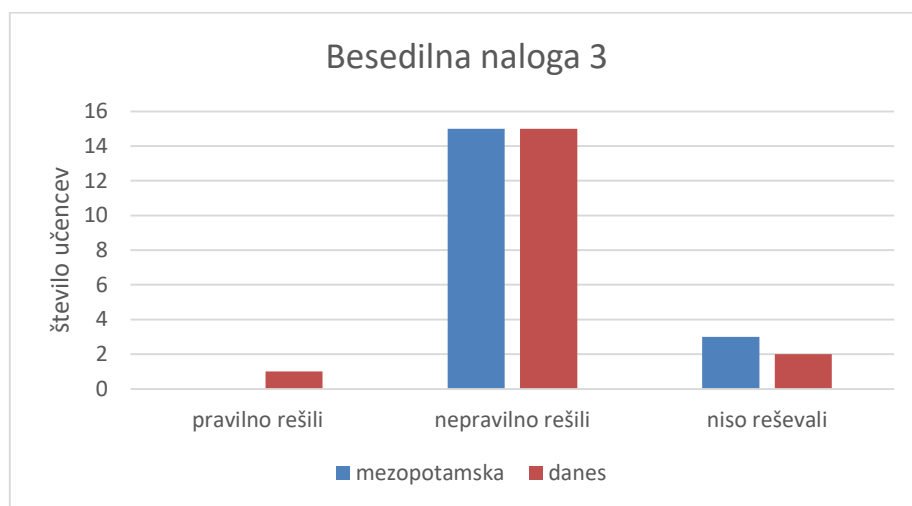


Preseneča nas, da je kar 12 od 18 učencev pravilno rešilo mezopotamsko besedilno nalogo, medtem ko je današnjo verzijo pravilno rešilo le 8 učencev. Predvidevamo, da jim je bila ta naloga med mezopotamskimi najbolj razumljiva in so se ji zato bolj posvetili.

Tabela 6: Besedilna naloga 3

MEZOPOTAMCI	Od prvega obroča iz srebra si odlomil sedmino od drugega pa enajstino. Oba odlomljena dela tehtata skupaj 1 gin. Oba preostala dela obročev tehtata enako. Koliko je tehtal vsak obroč?
DANES	Imaš dva srebrna obroča. Od prvega si odlomil sedmino od drugega pa enajstino. Oba odlomljena dela skupaj tehtata 1 kg. Preostanka obeh obročev sta enako težka. Koliko je tehtal vsak obroč?
REŠITEV	$\frac{1}{7}a + \frac{1}{11}b = 1$ $a - \frac{1}{7}a = b - \frac{1}{11}b$ Prvi obroč: $a = \frac{35}{8} \text{ gina}$ Drugi obroč: $b = \frac{33}{8} \text{ gina}$

Graf 3: Reševanje besedilne naloge 3

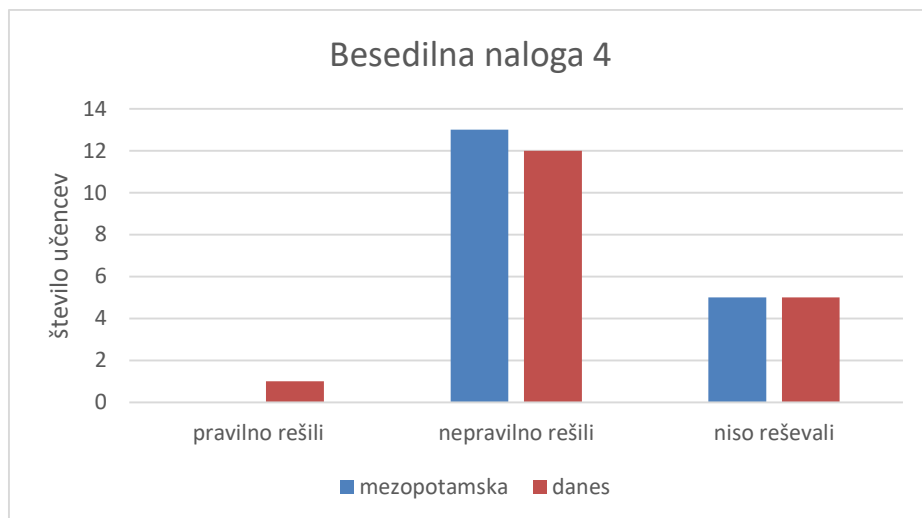


Učenci so bolj reševali današnjo različico naloge. Pravilno jo je rešil en učenec, večina učencev pa se je vsaj lotila reševanja, medtem ko mezopotamske različice ni rešil noben učenec. Sklepamo, da so se učenci lažje lotili naloge, v kateri so uporabljene nam bolj domače enote (kg namesti gin).

Tabela 7: Besedilna naloga 4

MEZOPOOTAMCI	Dolžina, širina. Globina je dvanajstkrat večja kakor dolžina. Tako so izkopali jamo. Če sešteješ prostornino jame in ploščino njenega dna, dobiš $1 + \frac{10}{60} \cdot \frac{30}{60}$ je dolžina. Kolikšna je širina?
DANES	Izkopali so jamo katere dolžina je $\frac{30}{60}$. Njena globina je dvanajstkrat večja kakor dolžina. Če sešteješ prostornino jame in ploščino njenega dna, dobiš $1 + \frac{10}{60}$. Kolikšna je širina?
REŠITEV	$dolžina = x, \quad širina = y, \quad globina = z$ $x = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}, \quad z = 12x = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ $xyz + xy = 3y + \frac{1}{2}y = \frac{7}{6}$ $y = \frac{20}{60}$

Graf 4: Reševanje besedilne naloge 4

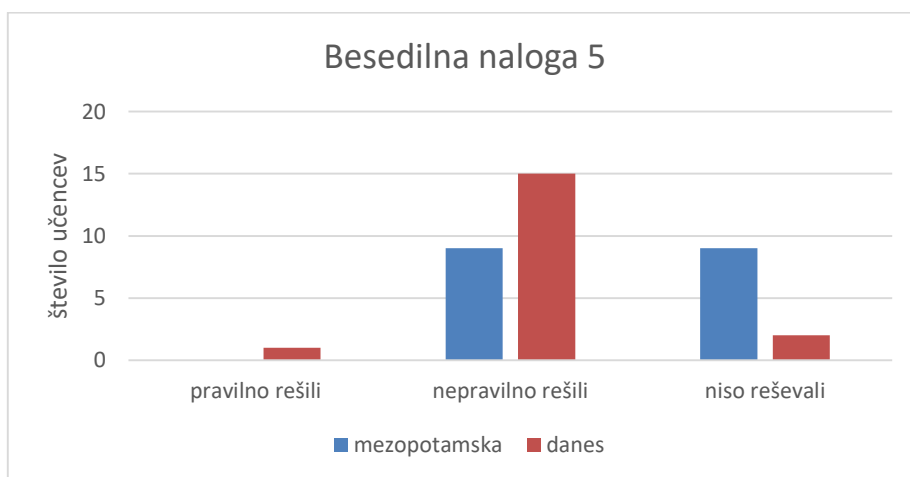


Reševanja obeh različic naloge se je lotilo 13 učencev, vendar večinoma neuspešno. Nalogo je namreč pravilno rešil le en učenec, vendar samo današnjo različico. Opažamo, da je tiste, ki so se lotili reševanja naloge, zmotil zapis podatkov v šestdesetiškem sistemu ($\frac{30}{60}$ namesto $\frac{1}{2}$).

Tabela 8: Besedilna naloga 5

MEZOPOTAMCI	Ob zidu stoji pokončno postavljena palica. Če jo na spodnjem koncu odmakneš od zida za 9, zdrsne njen zgornji konec ob zidu za 3 navzdol. Kako dolga je palica?
DANES	Ob zidu stoji pokončno postavljena palica. Če jo na spodnjem koncu od zida odmaknemo za 9 dm, njen zgornji del ob zidu zdrsne za 3 dm navzdol. Kako dolga je palica?
REŠITEV	$\text{dolžina palice} = x$ $x^2 = (x - 3)^2 + 9^2$ $x = 15$

Graf 5: Reševanje besedilne naloge 5



Nalogo je pravilno rešil en učenec, in to današnjo verzijo. Glede na to, da se je reševanja današnje naloge lotilo več učencev, in glede na njihove komentarje ob reševanju, predvidevamo, da jim je največji problem predstavljalo pomanjkanje podatkov (decimalne enote) ter način zapisa danih podatkov.

2.2.6 Izdelava glinenih ploščic

Mezopotamci so si pri zapisovanju svojih odkritij pomagali s tablicami, na katere so si zapisovali razne ugotovitve ter ključne, s katerimi so si pomagali pri računanju. Raziskovanje misli davnih Mezopotamcev nas je tako prevzelo, da smo se odločili tudi sami preizkusiti v izdelavi le-teh, da bi se lahko še lažje vživeli v njihovo takratno doživetje matematike.

Za izdelavo glinenih tablic smo uporabili rdečo glino ter razne ostre paličice in svinčnike vseh debelosti. Izdelava je vse prej kot enostavna in klinopis je zahteval veliko časa, zato nas dejstvo, da so si z odštevalnim sistemom želeli zmanjšati količino znakov in s tem olajšati delo, sploh ne preseneča. Sedaj nam je tudi jasno, zakaj so si že vnaprej izdelali veliko tabel raznih števil, ki so jim bila v pomoč pri računanju na pamet.



Slika 12: Število 3635
(Vir: avtorici)



Slika 13: Število 3899
(Vir: avtorici)



Slika 14: Število 85
(Vir: avtorici)



Slika 15: Število 3625
(Vir: avtorici)

3 RAZPRAVA

Ugotovitve podajamo glede na dobljene rezultate rešenih nalog in jih interpretiramo na podlagi hipotez:

Hipoteza 1: Učenci bodo bolje reševali današnjo verzijo nalog kakor mezopotamsko.

Hipotezo **lahko delno potrdimo**. »Prevodi« mezopotamskih nalog so se izkazali za bolj razumljive, zato so jih učenci lažje rešili v večini primerov (4 od petih nalog). Več učencev je rešilo le drugo mezopotamsko nalogo. Predvidevamo, da zato, ker jih je bolj pritegnila in so se ji bolj posvetili.

Hipoteza 2: Učenci bodo pogrešali enote v mezopotamskih nalogah.

To hipotezo **lahko potrdimo**. Ugotavljamo, da so imeli Mezopotamci drugačen način zapisovanja nalog. Naše učence je pri teh nalogah zmotilo pomanjkanje informacij (kot so podane decimalne enote ipd.) ter spremenjen vrstni red danih podatkov (ključne informacije za rešitev naloge zapisane na koncu). Potrebovali so več razlage in pojavilo se je več vprašanj.

Seveda raziskave brez težav nismo pričakovali. Zanimivo se je bilo spuščati v zapletenost mezopotamske matematike. Zavedamo se, da je težko na podlagi vzorca 18 učencev sklepati o težavnosti mezopotamskih nalog. Morda bi lahko bili rezultati še boljši, če bi se učenci popolnoma posvetili reševanju. Tako pa smo vse skupaj izvedli kot popestritev pri pouku. Najbolj bistveno je, da smo se naučili in preizkusili veliko novega. Ugotavljamo, da imajo učenci, kljub temu da matematična področja, na katerih so temeljile naloge, že poznajo, težave z reševanjem nalog, ki jih niso vajeni. Zanimivo je bilo odkrivati kompleksnost matematike davnih Mezopotamcev.

4 ZAKLJUČEK

S poglobitvijo v zgodovinsko ozadje razvoja matematike smo razširili svoja znanja na raznoraznih področjih. Raziskovanje samo nam je prineslo mnoge izkušnje z delom z literaturo ter iskanjem podatkov v pisnih virih – predvsem knjigah, katerih uporabe se v današnjih časih vedno manj poslužujemo. Med proučevanjem področij, ki jih je zajemalo poznavanje matematike starih Mezopotamcev, smo se z nekaterimi srečali prvič na takšen način (kot je npr. šestdesetiški sistem ipd.). Podatki, ki smo jih odkrili, so nas presenetili na vsakem področju, ki smo ga raziskovali. Poleg mnogih izkušenj ter spretnosti, ki nam jih je reševanje mezopotamskih nalog prineslo, pa smo se naučili tudi štetja do 60 na prste. To nam še danes pride zelo prav pri štetju ter preštevanju večjih količin. Nalogo bi bilo mogoče še razširiti, na primer samo o množenju ali deljenju in kako so prišli do formule. Pojavile so se tudi težave. Težko razumljive naloge in nekatera gradiva so samo še povečali zanimanje za dokončanje naloge.

Mnoge preglavice, ki so nam jih povzročili nekateri matematični problemi, pa so le dodaten dokaz, da se vse življenje učimo in spoznavamo nove stvari. Čeprav smo ljudje dandanes pripadniki mnogo bolj razvitih civilizacij, kakor so bili Mezopotamci, nas v nekaterih znanjih še vedno prekašajo, zato je pomembno, da se zavedamo, da moramo poznati preteklost, če želimo raziskovati prihodnost. Naj znanje, ki so nam ga na glinenih ploščicah predali Mezopotamci, ne bo pozabljeno, vendar izkoriščeno za nova odkritja, ki jih bomo nato mi lahko predali novim generacijam.

5 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Matematika je nepogrešljiva na različnih področjih v življenju. Zaradi potrebe v vsakdanjem življenju se je vse začelo. Tako so mezopotamski matematiki začeli počasi zapisovati in raziskovati globlje v osnove matematike. V nalogi smo se sprehodili skozi zgodovino matematike in ugotovili, da so bili Mezopotamci »Pitagora pred Pitagoro«. Spoznali smo, da so ljudje pred več kot štiri tisoč leti znali šteti, zapisovati števila in z njimi zelo spretno računati. Njihova dediščina se ohranja še danes, saj šestdesetiški številski sistem uporabljamo pri merjenju časa, kotov, zapisovanju geografskih koordinat.

Menimo, da se današnja družba vedno manj zaveda, kako pomembno je poznavanje korenin matematike. Čez nekaj desetletij, ko bodo v glavah že imeli vgrajen čip ali se bodo od rojstva urili samo za matematiko in računanje, ne da bi se zavedali, kako je bilo včasih, bo uporaba matematike v vsakdanjem življenju izgubila svoj pomen.

6 VIRI IN LITERATURA

6.1 Pisni viri

1. Berlingheff, W. P., Gouvêa, F. Q. (2008). Matematika skozi stoletja. Ljubljana: Modrijan.
2. Davide, V. (1984). Matematika skozi kulture in epohe. Ljubljana: DMFA.
3. Domanjko, V. (1993). Z nalogami skozi zgodovino matematike. Ljubljana: DZS.
4. Guedj, D. (1994). Svet števil. Ljubljana: DZS.
5. Morkot, R. (2002). Stari Egipt in njegova Kraljestva. Ljubljana: Cankarjeva založba.
6. Peinado, F. L. (1994). Kako so živeli Babilonci. Ljubljana: EWO.
7. Velika ilustrirana enciklopedija: Stare kulture. (1984). Ljubljana: Mladinska knjiga.

6.2 Spletni viri

1. <https://novice.svet24.si/clanek/zanimivosti/55ffcc127ad0a/vzpon-in-padec-prvih-med-prvimi> pridobljeno: 17. 1. 2020
2. <http://zgodovinazaprvilletnik.blogspot.com/2008/11/razvoj-mezopotamije.html> pridobljeno: 16. 1. 2020
3. www.presek.si/21/1160-Domajnko.pdf pridobljeno: 23. 10. 2019
4. Razpet, M. (2015). Babilonski zapis števil. Pridobljeno na www.pef.uni-lj.si/matwww/Babilonci.pdf dne 23. 10. 2019
5. Hladnik, M. (2012). Babilonska matematika. Pridobljeno na [https://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Babilon\(b\).pdf](https://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Babilon(b).pdf) dne 16. 1. 2020
6. Hladnik, M. (2013). Zgodovina matematike. Pridobljeno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/ZGODMAT.pdf> dne 17. 1. 2020

7 PRILOGE

7.1 Učni list z mezopotamskimi nalogami

MATEMATIKA V MEZOPOTAMIJI

1. naloga

Seštej: Vsoto dolžine in širine, za 10 povečano dolžino in za 15 povečano širino. Peti del tega je 25. Dolžina je 30. Kolikšna je širina?

2. naloga

Dolžina in četrtnina širine (pravokotnika) sta skupaj 7 dlani. Dolžina in širina skupaj sta 10 dlani. Koliko dlani je širina in koliko dolžina?

3. naloga

Od prvega obroča iz srebra si odlomil sedmino od drugega pa enajstino. Oba odlomljena dela tehtata skupaj 1 gin. Oba preostala dela obročev tehtata enako. Koliko je tehtal vsak obroč?

4. Naloga

Dolžina, širina. Globina je dvanajstkrat večja kakor dolžina. Tako so izkopali jamo. Če sešteješ prostornino jame in ploščino njenega dna, dobiš $1 + \frac{10}{60}$. $\frac{30}{60}$ je dolžina. Kolikšna je širina?

5. Naloga

Ob zidu stoji pokončno postavljena palica. Če jo na spodnjem koncu odmakneš od zida za 9, zdrsne njen zgornji konec ob zidu za 3 navzdol. Kako dolga je palica?

7.2 Učni list z »današnjimi nalogami«

MATEMATIKA V MEZOPOTAMIJI (danes)

1. Naloga

Imaš dva srebrna obroča. Od prvega si odlomil sedmino od drugega pa enajstino. Oba odlomljena dela skupaj tehtata 1 kg. Preostanka obeh obročev sta enako težka. Koliko je tehtal vsak obroč?

2. Naloga

Dolžina je 30. Vsoti dolžine in širine prištej za 10 povečano dolžino in za 15 povečano širino. Petina celotne vsote je 25. Kolikšna je širina?

3. Naloga

Dolžina in četrtnina širine pravokotnika skupaj merita 7 enot, dolžina in celotna širina pa 10 enot. Koliko enot meri širina in koliko dolžina?

4. Naloga

Ob zidu stoji pokončno postavljena palica. Če jo na spodnjem koncu od zida odmaknemo za 9 dm, njen zgornji del ob zidu zdrsne za 3 dm navzdol. Kako dolga je palica?

5. Naloga

Izkopali so jamo katere dolžina je $\frac{30}{60}$. Njena globina je dvanajstkrat večja kakor dolžina. Če sešteješ prostornino jame in ploščino njenega dna, dobiš $1 + \frac{10}{60}$. Kolikšna je širina?