"50. srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2016"

Osnovna šola Janka Padežnika Maribor,

Iztokova 6, 2000 Maribor

AMIDA

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Mentorici:

Doroteja ANČEV

Suzana TOMŠIČ MAVRIČ

Avtorici:

Deja VINDER (7. razred)

Sara VOLGEMUT (7. razred)

Maribor, 2016

KAZALO VSEBINE stran

KAZALO SLIK

POVZETEK

Pri matematičnih delavnicah smo se igrali igrico, ki ji pravimo Amida. Radi jo igrajo otroci na Japonskem in si z njeno pomočjo izmenjujejo predmete. Bilo je zelo zanimivo, ko smo tudi mi ugotovili, da res vsakemu izmed nas pripada eno darilce, ki jih je za nas pripravila učiteljica. Zanimalo naju je, ali je res vedno tako in zakaj. Po pogovoru z učiteljico sva ugotovili, da so v ozadju določene matematične zakonitosti. Permutacije, kaj je to? Najprej na kratko predstaviva permutacije brez ponavljanja in pokaževa, da igra Amida temelji na njihovih osnovah. Gre pravzaprav za razporejanje določenega števila elementov na enako število prostih mest. V osrednjem delu z metodo poskušanja ugotavljava, da vedno pripada vsakemu igralcu en dobitek. Prav tako ugotavljava, ali obstaja sistem, po katerem bi lahko že na začetku ugotovili, kateri dobitek pripada kateremu igralcu. S pomočjo te igre lahko razdelimo med igralce določene predmete, ne da bi se sprli in da bo vsak dobil natanko en predmet.

Ključne besede: matematika, kombinatorika, permutacije brez ponavljanja, družabne igre, amida

ABSTRACT

In a math workshop we have been playing a game called Amida. It is a game played by children in Japan and is used to exchange objects. It was very interesting when we found out that our teacher has also prepared some small gifts that were waiting for all of us. We were curious whether it is always like this and why. After talking to our teacher we found out that there are some mathematical laws behind this game. Permutation; but what is this? At first we describe permutation without repetition in short and show that Amida is based on it. It is actually the distrubution of a certain number of elements on the same number of free spaces. In the body of our research we use the method of tryout to come to the conclusion that at the end there is always one prize for everyone. We also tried to find out whether there is a system of finding out about who gets what prize right at the beginning of the game. With the help of this game we are able to distribute certain object without getting into confict and everyone getting exactly one object.

Key words: Mathematics, syntactics, permutation without repetition, board games, amida

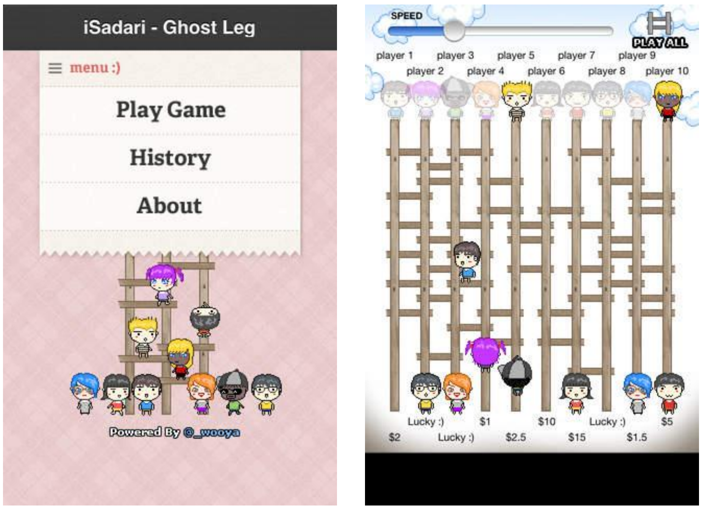
1 UVOD

V šoli smo se igrali igrico, ki je zelo znana v azijskih državah. Na Japonskem jo imenujejo Amida oz. Amidakuji（阿 弥 陀）in pomeni »loterijo«, na Kitajskem je znana kot Ghost Leg（畫鬼腳）, v Koreji pa kot Sadalitagi（사다리 타기）, kar pomeni plezanje »po lestvi« (povzeto po: https://en.wikipedia.org/wiki/Ghost_Leg).

S pomočjo igre si otroci izmenjujejo igrače, predmete, naloge … Za igranje igre Amida potrebujemo papir, pisalo in toliko dobitkov, kolikor je igralcev. Učiteljica je za vsakega med nami pripravila darilce. Nismo verjeli, da bo vsak dobil natanko eno. Ampak kakorkoli smo zamenjali vrstni red igralcev ali daril in risali različno število prečnih črt, vedno je vsak med nami dobil darilo. Igra nam je bila všeč, saj se niti spreti nismo mogli. Mi smo bili tisti, ki smo risali prečne črte in s tem odločali o dobitkih.

Zanimalo naju je, zakaj je tako in ali bi lahko že na začetku ugotovili, kaj bo kdo dobil. Ugotovili sva, da igra temelji na matematični osnovi kombinatorike, permutacijah brez ponavljanja. Gre za razporejanje določenega števila elementov na enako število prostih mest (po nekem vrstnem redu).

Zanimivo je, da je igra na Japonskem razširjena tudi v obliki loterije. Glede na dejstvo, da je to dežela, znana po velikem tehnološkem napredku, pa ne preseneča, da so na osnovi igre Amida razvili tudi veliko računalniških igric.



Slika 1: Igra Amida kot primer računalniške igrice za iPhone

(vir: https://itunes.apple.com/us/app/isadari-the-ghost-leg/id357416104?mt=8)

1. 1 Raziskovalni problem

Namen najine naloge je bil s pomočjo permutacij raziskati japonsko igrico Amida. V igri lahko sodeluje neomejeno število igralcev. Pogoj je, da imamo dobitkov toliko, kot je igralcev. Od števila igralcev je odvisno, koliko permutacij bomo dobili, npr. pri dveh igralcih 2 permutaciji, pri treh igralcih 6 permutacij, pri štirih igralcih 24 permutacij, pri petih igralcih pa že 120 permutacij, ….

Glede na to, da sva izbrali metodo poskušanja, sva se po nasvetu mentoric odločili raziskati igro na primerih dveh igralcev (dve permutaciji) in treh igralcev (šest permutacij). Metoda je bolj primerna za raziskovanje manjšega števila permutacij. Za obravnavo večjega števila bi potrebovali algoritem ali računalniški program. Ta pa bi za naju in najino trenutno znanje matematike predstavljal prevelik problem.

Znotraj tega raziskovanja sva iskali odgovore na naslednja ciljna vprašanja:

- Ali se lahko zgodi, da bi več igralcev dobilo isti dobitek?
- Ali obstaja sistem, po katerem bi lahko že na začetku ugotovili, kateri dobitek pripada kateremu igralcu?

1. 2 Hipoteze

Glede na cilje raziskovalnega problema sva postavili naslednje hipoteze:

1. Vsak igralec dobi natanko en dobitek.

2. Igralec nikoli ne dobi dobitka, napisanega pod njegovim imenom.

3. Po številu prečnih črt lahko vnaprej ugotovimo, kateri dobitek bo dobil posamezni igralec.

1. 3 Teoretične osnove

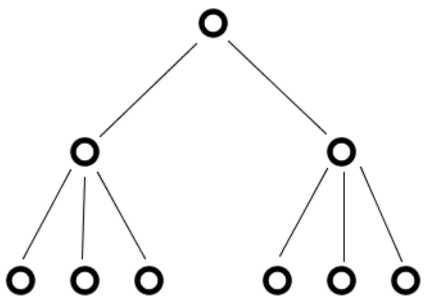
1. 3. 1 Kombinatorika

»Kombinatorika je veja matematike, ki se ukvarja s preštevanjem in razporeditvijo elementov dane končne množice« (Šparovec, 2004, str. 56).

»Osnovni izrek kombinatorike (pravilo produkta):

Naj bo proces odločanja takšen, da poteka v k zaporednih fazah, pri čemer je v prvi fazi n_1 možnih odločitev, v drugi fazi n_2 možnih odločitev, …, v k-ti fazi n_k možnih odločitev, število izborov v posamezni fazi pa je neodvisno od tega, katere možnosti smo izbrali v predhodnih fazah. Potem je mogoče celotni izbor opraviti na $n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ načinov«. (Kavka, 1997, str. 122)

Proces odločanja lahko ponazorimo s kombinatoričnim drevesom. Na primer:



1. faza → 2 odločitvi

2. faza → 6 odločitev

Slika 2: Kombinatorično drevo (vir: avtorici)

Med osnovne kombinatorične prijeme štejemo permutacije brez ponavljanja, permutacije s ponavljanjem, variacije brez ponavljanja, variacije s ponavljanjem, kombinacije brez ponavljanja in kombinacije s ponavljanjem.

1. 3. 2 Permutacije brez ponavljanja

Permutacije so razporejanje danih n elementov na n prostih mest (po nekem vrstnem redu). Če bi imeli npr. 3 elemente, bi jih lahko, npr. razporedili tako, da bi drugi prišel na prvo mesto, tretji na drugo in prvi na tretje. To lahko krajše zapišemo kot $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Zapis v zgornji vrstici nam predstavlja dane elemente, zapis v drugi vrstici pa predstavlja njihovo novo razporeditev.

S kombinatoričnimi problemi so se ukvarjali že stari Kitajci, vendar je prvo razpravo o tem leta 1494 izdal frančiškanski pater Luca Pacioli v knjigi Summa de aritmeticae. V njej je opisal, na koliko različnih načinov se lahko določeno število ljudi usede za ravno mizo.

» Primer: Na koliko načinov lahko za ravno mizo sedi sedem povabljencev?

Na prvi stol se usede eden od sedmih povabljencev, torej imamo v prvi fazi 7 možnosti, na drugi stol se usede eden od preostalih šestih (6 možnosti), na tretji stol eden od petih (5 možnosti) in tako naprej. Zadnji, sedmi stol zasede tisti, ki je ostal. Torej lahko razvrščanje po stolih razumemo kot proces, sestavljen iz sedmih zaporednih faz. Ker je prva faza izvedljiva na sedem načinov, druga na šest načinov, tretja na pet načinov, ..., zadnja pa na en način, je celoten proces izvedljiv na

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ *načinov «* (Topolovec, pridobljeno 12. 12. 2015).

To pa lahko posplošimo na poljubno število elementov. Recimo, da jih je $\boldsymbol{n}$, potem je število vseh razporeditev teh elementov

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

To je produkt prvih *n* naravnih števil in ga označimo z $\boldsymbol{n}!$ (beremo: n fakulteta ali n faktoriela).

O permutacijah govorimo takrat, kadar urejamo vse elemente dane končne množice v vrsto, in ker so ti elementi med sabo različni, so to permutacije brez ponavljanja.

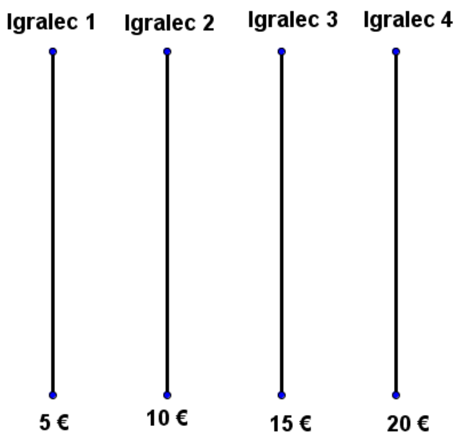
Število permutacij brez ponavljanja množice z n elementi je torej:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

1. 3. 3 Amida

Amida je zanimiva japonska otroška igra, s katero lahko otroci izmenjujejo predmete, naloge. Pri tem potrebujejo list papirja, pisalo in toliko dobitkov, kot je igralcev.

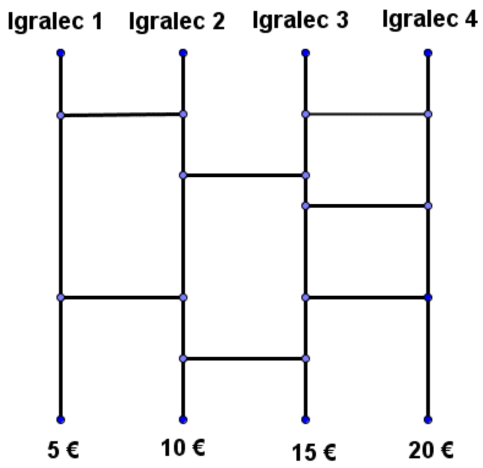
Na list papirja najprej narišemo vzporedne navpičnice. Narišemo jih toliko, kot je igralcev. Na vrh vsake navpičnice napišemo ime enega igralca. Izid igre ni odvisen od razporeda imen igralcev. Na dno navpičnic pa napišemo imena dobitkov, pod vsako navpičnico enega. Tudi razpored dobitkov ne vpliva na izid igre. Tako dobimo na primer skico:



Slika 3: Primer razporeditve igralcev in dobitkov pri igri Amida (vir: avtorici)

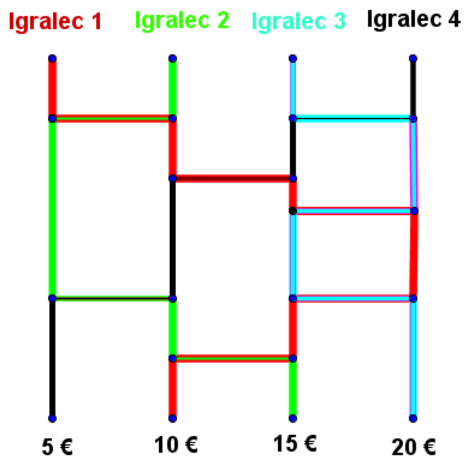
To ne pomeni, da bodo igralci dobili dobitek, ki je napisan pod njihovim imenom. Sedaj pa vsak od igralcev nariše poljubno število vodoravnih prečnih črt, ki se spajajo z navpičnicami. Edina omejitev je, da se nobeni dve vodoravni črti ne smeta nadaljevati druga za drugo (ne smeta se končati oziroma začeti v isti točki navpičnice).

Potem dobimo na primer skico:



Slika 4: Primer postavitve prečnih črt pri igri Amida (vir: avtorici)

Da bi igralec prišel do svojega dobitka, gre vzdolž svoje navpičnice do prve vodoravne prečke in po njej do sosednje navpičnice. Potem se mora spustiti po tej navpičnici ponovno do prve vodoravne prečke in po le-tej, da preide na sosednjo navpičnico itn., dokler ne prispe na spodnji konec neke navpičnice, kjer ga čaka njegov dobitek.



Slika 5: Primer prikaza dobitkov pri igri Amida (vir: avtorici)

2 OSREDNJI DEL NALOGE

2. 1 Metodologija

Uporabili sva naslednje metode dela:

- Metodo proučevanja pisnih virov.
- Metodo poskušanja.
- Metodo analize podatkov in njihovo interpretacijo.

2. 1. 1 Metoda proučevanja pisnih virov

Začetna metoda dela je bila metoda dela s pisnimi viri. Literaturo sva najprej iskali v šolski knjižnici in mariborski knjižnici. Iskali sva tudi na spletu. Zbrane materiale sva preučili, prebrali in se pogovorili. Ob pomoči mentoric sva ugotovitve povzeli in uskladili.

2. 1. 2 Metoda poskušanja

To metodo sva uporabili v osrednjem delu raziskave. Na izid igre vpliva število vodoravnih prečnih črt, zato sva se raziskovanja lotili sistematično. Igrali sva se igrico. Vsakokrat sva na papir narisali toliko navpičnic, kot je igralcev, spreminjali pa sva število prečnih črt in njihovo medsebojno lego. Metoda je bolj primerna za raziskovanje manjšega števila permutacij. Najprej sva raziskovali, kakšne so možnosti za dobitek pri dveh igralcih, nato pa še pri treh.

2. 1. 3 Metoda analize podatkov in njihova interpretacija

Zbrane podatke o rezultatih igranja igre sva pregledali, jih uredili po enakih permutacijah, analizirali in podali ugotovitve. Za prikaz poteka igre pri določenem številu igralcev in različnem številu prečnih črt sva uporabljali osebni računalnik in programe Geogebra in Microsoft Word.

2. 2 Opis rezultatov

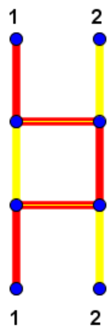
2. 2. 1 Igra z dvema igralcema

Pri igri z dvema igralcema sva pričakovali dve možni permutaciji, saj velja

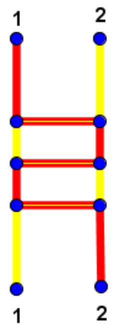
$$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2.$$

Te permutacije so: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

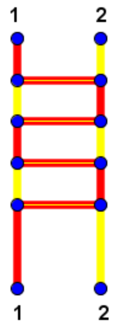
Vsak od igralcev mora narisati prečne črte, zato jih moramo narisati najmanj dve. Preverjali sva možnosti dobitkov pri narisanih dveh, treh, štirih, petih, šestih, sedmih in osmih prečnih črtah. Dobili sva razporeditve, kot so prikazane v nadaljevanju.



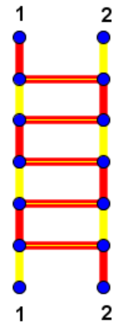
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



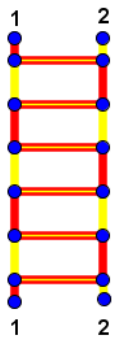
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



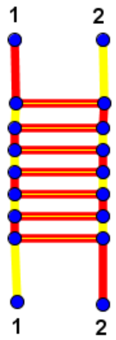
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



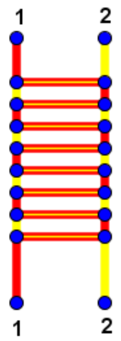
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Slika 6: Razporeditev dobitkov pri igri Amida, ko sta udeležena dva igralca (vir: avtorici)

Ugotavljava, da se res pojavljata dve permutaciji: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Permutacija $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ se pojavlja pri dveh, štirih, šestih in osmih prečnih črtah (sodih), permutacija $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ pa pri treh, petih in sedmih prečnih črtah (lihih).

2. 2. 2 Igra s tremi igralci

Pri igri s tremi igralci sva pričakovali šest možnih permutacij, saj velja

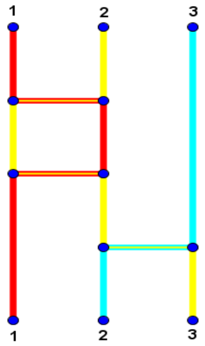
$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Te permutacije so:

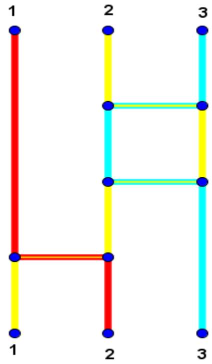
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Glede na to, da mora vsak igralec narisati prečne črte, ni pa nujno, da vsi narišejo enako število črt, sva preverjali možnosti dobitkov pri narisanih treh, štirih, petih, šestih, sedmih in osmih prečnih črtah. Dobili sva razporeditve, kot so prikazane v nadaljevanju.

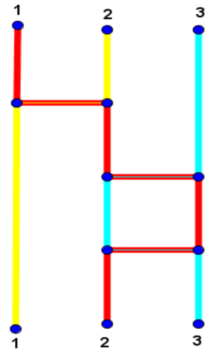
2. 2. 2. 1 Igra s tremi igralci in tremi prečnimi črtami



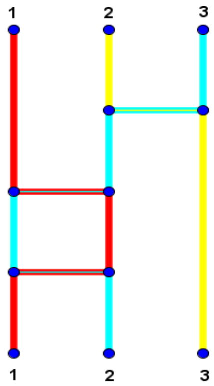
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$



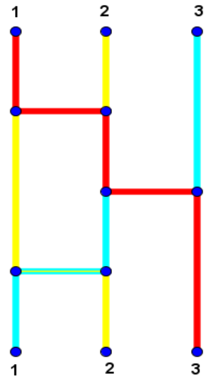
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



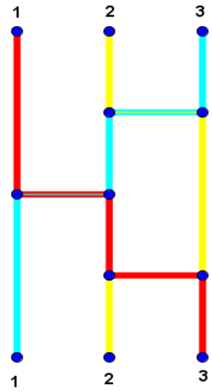
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

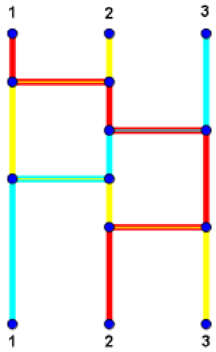


$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

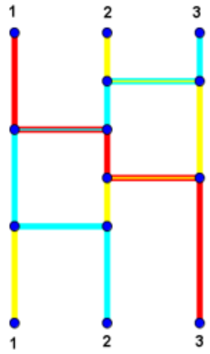
Slika 7: Razporeditev dobitkov pri igri Amida, ko so udeleženi trije igralci in tremi prečnimi črtami (vir: avtorici)

Presenetilo naju je, da se pojavijo le tri permutacije od možnih šestih: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. To so permutacije, pri katerih eden od igralcev dobi dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom, druga dva pa dobita zamenjana dobitka.

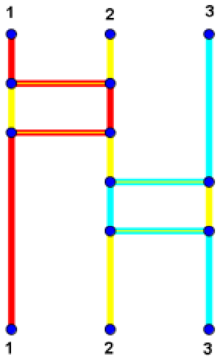
2. 2. 2. 2 Igra s tremi igralci in štirimi prečnimi črtami



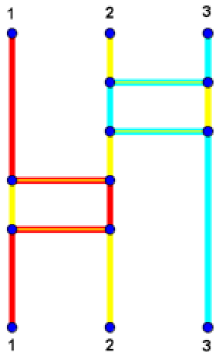
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



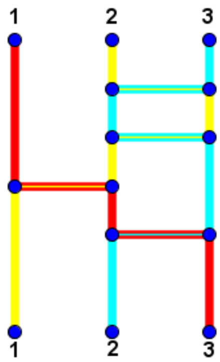
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



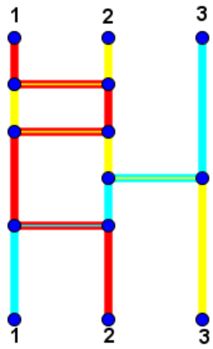
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



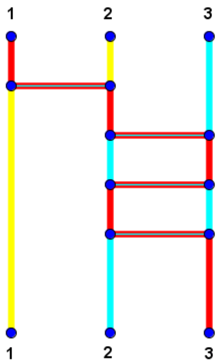
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



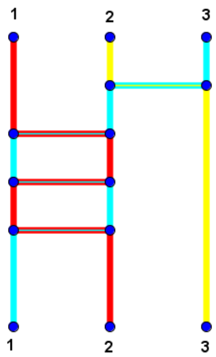
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



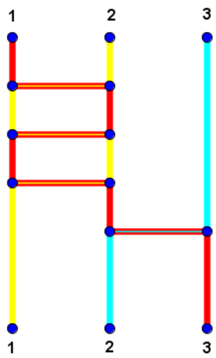
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



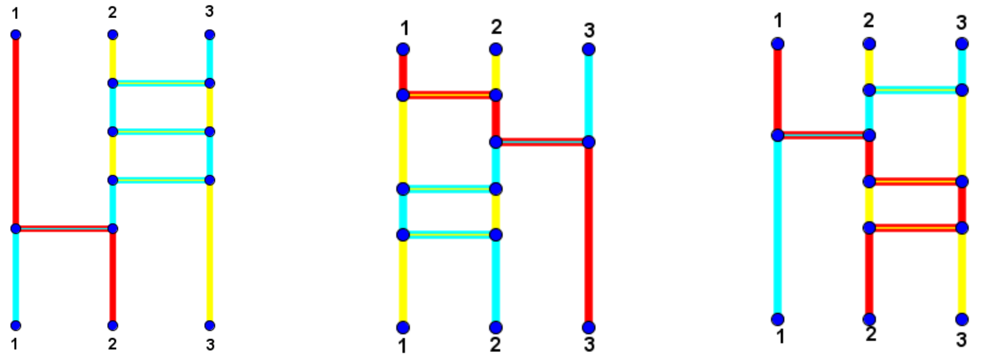
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



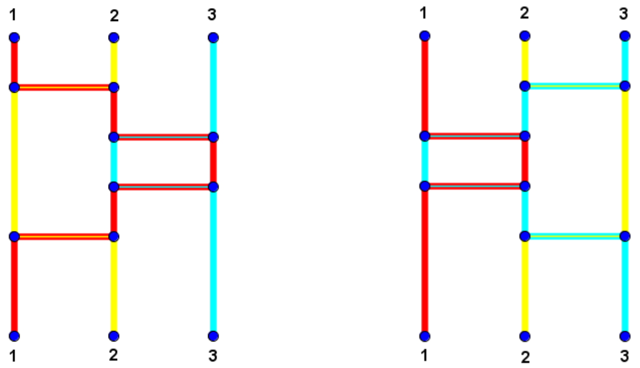
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$



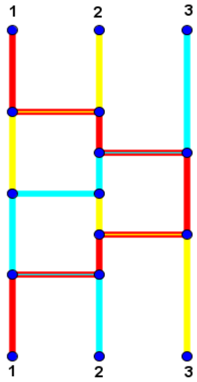
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Slika 8: Razporeditev dobitkov pri igri Amida, ko so udeleženi trije igralci in štirimi prečnimi črtami (vir: avtorici)

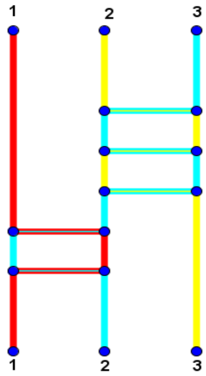
Preseneča, da se ponovno pojavijo le tri permutacije od šestih. V tem primeru so to: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Med njimi se pojavi permutacija, ko lahko vsak izmed igralcev dobi natanko tisti dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom. Pri preostalih dveh permutacijah pa igralci nikoli ne dobijo dobitka, napisanega pod njihovim imenom.

2. 2. 2. 3 Igra s tremi igralci in petimi prečnimi črtami

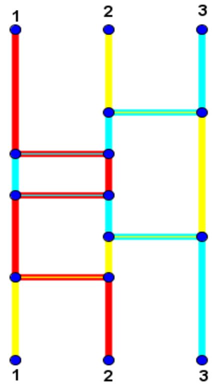
V nadaljevanju je prikazanih le nekaj permutacij (vse razporeditve so prikazane v prilogi).



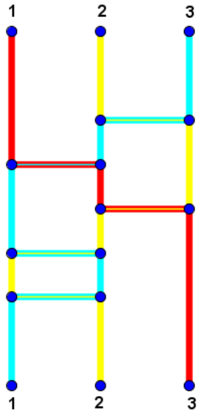
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



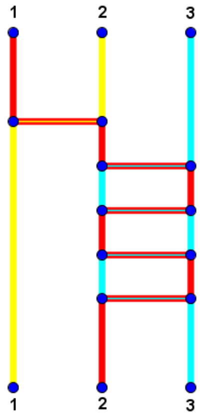
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



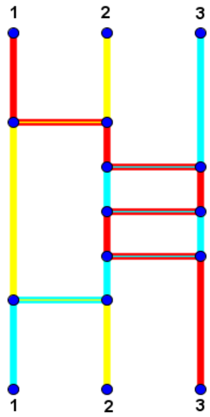
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



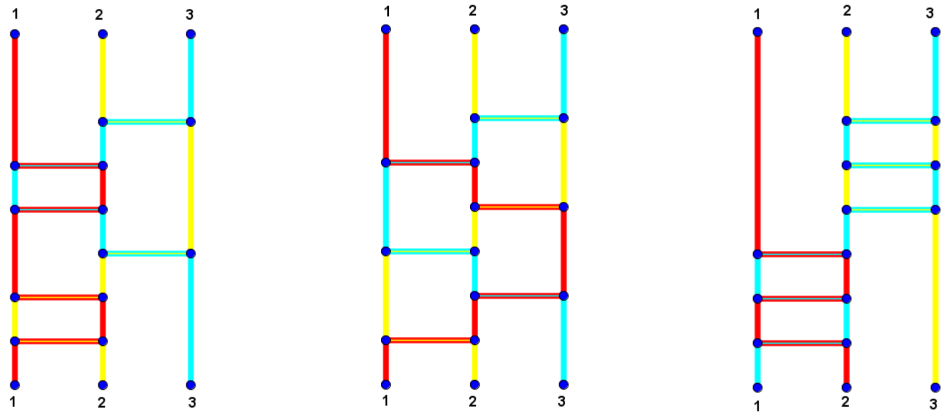
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Slika 9: Izbrane razporeditve dobitkov pri igri Amida, ko so udeleženi trije igralci, in petimi prečnimi črtami (vir: avtorici)

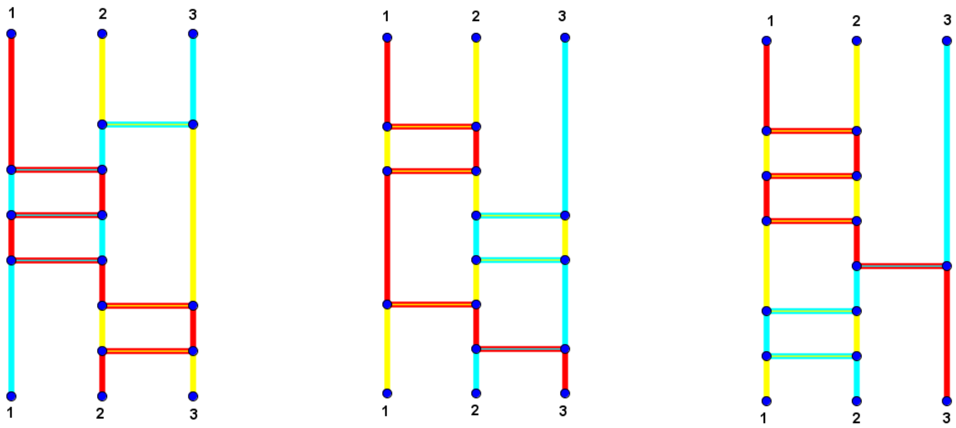
Ugotavljava, da se tokrat spet pojavijo le tri permutacije: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ki sva jih dobili že pri treh prečnih črtah. To so permutacije, pri katerih eden od igralcev dobi dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom, druga dva pa dobita zamenjana dobitka.

2. 2. 2. 4 Igra s tremi igralci in šestimi prečnimi črtami

V nadaljevanju je prikazanih le nekaj permutacij (vse razporeditve so prikazane v prilogi).



$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$



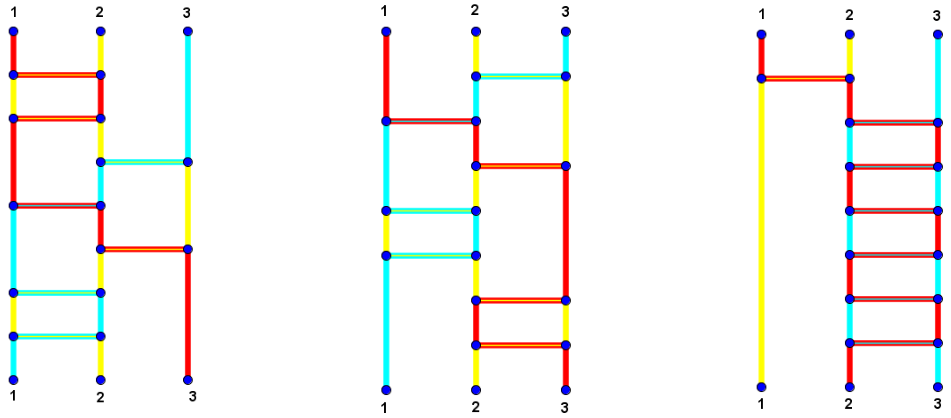
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Slika 10: Izbrane razporeditve dobitkov pri igri Amida, ko so udeleženi trije igralci, in šestimi prečnimi črtami (vir: avtorici)

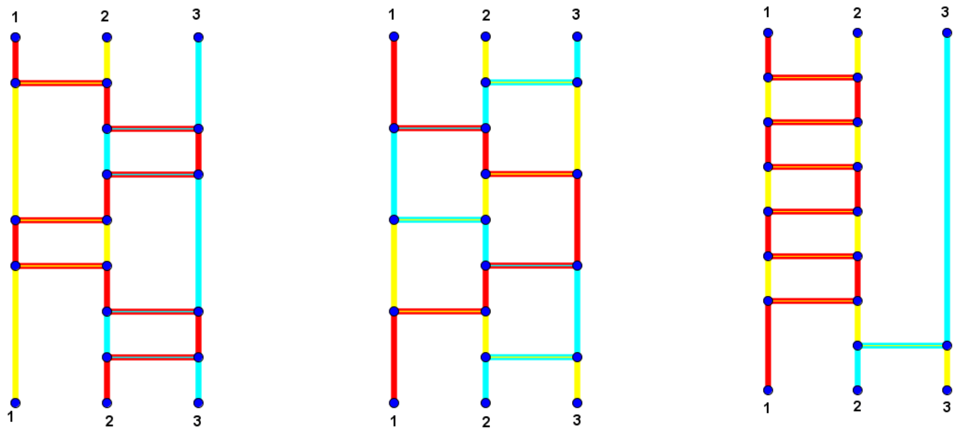
Ugotavljava, da se spet pojavijo le tri permutacije: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Te sva že dobili pri štirih prečnih črtah. Tu je permutacija, ko lahko vsak izmed igralcev dobi natanko tisti dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom. Pri preostalih dveh permutacijah pa igralci nikoli ne dobijo dobitka, napisanega pod njihovim imenom.

2. 2. 2. 5 Igra s tremi igralci in sedmimi prečnimi črtami

V nadaljevanju je prikazanih le nekaj permutacij (vse razporeditve so prikazane v prilogi).



$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$



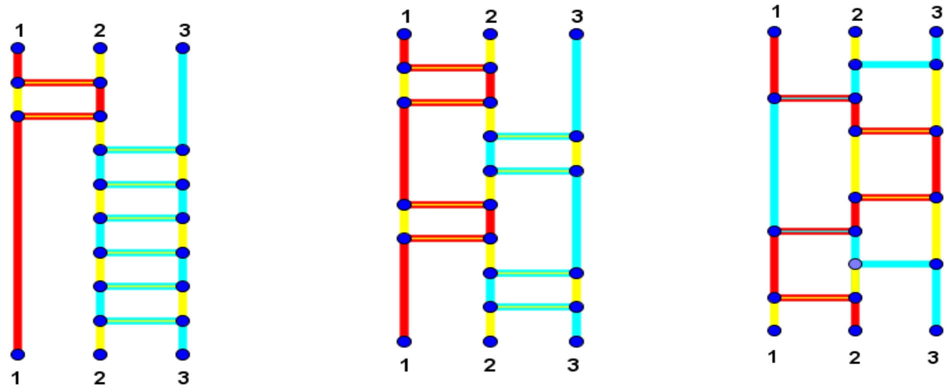
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Slika 11: Izbrane razporeditve dobitkov pri igri Amida, ko so udeleženi trije igralci, in sedmimi prečnimi črtami (vir: avtorici)

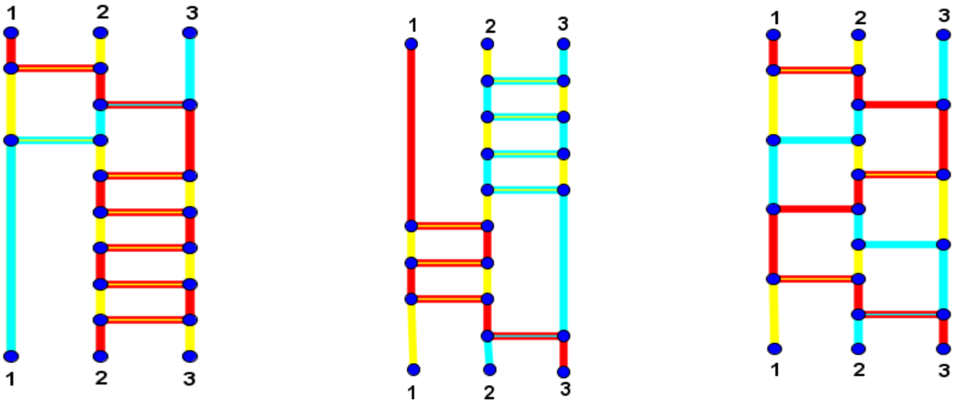
Ponovno ugotavljava, da se pojavijo le tri permutacije: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Te sva dobili že pri treh in petih prečnih črtah. To so permutacije, pri katerih eden od igralcev dobi dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom, druga dva pa dobita zamenjana dobitka.

2. 2. 2. 6 Igra s tremi igralci in osmimi prečnimi črtami

V nadaljevanju je prikazanih le nekaj permutacij (vse razporeditve so prikazane v prilogi).



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Slika 12: Izbrane razporeditve dobitkov pri igri Amida, ko so udeleženi trije igralci, in z osmimi prečnimi črtami (vir: avtorici)

Ugotavljava, da se spet pojavijo le tri permutacije: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, ki sva jih dobili že pri štirih in šestih prečnih črtah. Tu je permutacija, ko lahko vsak izmed igralcev dobi natanko tisti dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom. Pri preostalih dveh permutacijah pa igralci nikoli ne dobijo dobitka, napisanega pod njihovim imenom.

3 RAZPRAVA

Ugotovitve podajava glede na dobljene rezultate pri igri dveh in treh igralcev ter jih interpretirava na podlagi hipotez:

- **Hipoteza 1: Vsak igralec dobi natanko en dobitek.**

  Na osnovi poskušanja igranja igre Amida in preučevanja literature lahko **hipotezo potrdiva.** V vseh primerih igranja igre se je vedno zgodilo, da je vsak igralec dobil natanko en dobitek.

- **Hipoteza 2: Igralec nikoli ne dobi dobitka, napisanega pod njegovim imenom.**

  Na osnovi poskušanja igranja igre Amida ugotavljava, da **hipoteze ne moreva potrditi**. Že pri dveh igralcih se zgodi permutacija $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, kar pomeni, da vsak igralec dobi dobitek, ki je napisan pod njegovim imenom. To se zgodi tudi pri igri treh igralcev $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dobili pa sva tudi permutacije $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, kjer je očitno, da le eden izmed igralcev dobi dobitek napisan pod njegovim imenom.

- **Hipoteza 3: Po številu prečnih črt lahko vnaprej ugotovimo, kateri dobitek bo dobil posamezni igralec.**

  Na osnovi poskušanja igranja igre Amida ugotavljava:

  - <u>Pri igri dveh igralcev</u> sva pričakovali dve permutaciji, saj velja $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$. Permutacija $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ se pojavlja pri dveh, štirih, šestih in osmih prečnih črtah (sodih), permutacija $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ pa pri treh, petih in sedmih prečnih črtah (lihih).

Tako bi lahko ugotovitve pri <u>igri dveh igralcev</u> posplošili za poljubno število prečnih črt (n):

$$n \text{ prečnih črt} \begin{cases} \text{če je } n \text{ sodo število dobimo permutacijo } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{če je } n \text{ liho število dobimo permutacijo } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- <u>Pri igri treh igralcev</u> sva pričakovali šest permutacij, saj velja $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Zanimivo je, da so se permutacije $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ zmeraj pojavile pri lihem številu prečnih črt; pri treh, petih in sedmih. Preostale tri permutacije $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ pa so se zmeraj pojavile pri sodem številu prečnih črt; pri štirih, šestih in osmih prečnih črtah.

Tako bi lahko ugotovitve pri <u>igri treh igralcev</u> posplošili za poljubno število prečnih črt (n):

$$n\ prečnih\ črt \begin{cases} če\ je\ n\ sodo\ število\ dobimo\ permutacije \\ \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ če\ je\ n\ liho\ število\ dobimo\ permutacije \\ \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Na osnovi zapisanega ugotavljava, da lahko tretjo **hipotezo delno potrdiva**. Pri dveh igralcih lahko točno določimo, kateri dobitek bo dobil igralec, če preštejemo prečne črte. Pri treh igralcih pa ne moremo točno določiti, kaj kdo dobi. Lahko se le omejimo na tri možnosti izmed šestih.

Zavedava se, da sva igro preučevali le na primerih dveh in treh igralcev, kjer je bila še primerna metoda poskušanja. V primerih več igralcev je tudi permutacij več. V tem primeru metoda poskušanja ni več primerna in bi bil potreben kakšen algoritem ali računalniški program. Zanimivo pa je, da sva že v primerih dveh in treh igralcev lahko zapisali neke posplošitve.

4 ZAKLJUČEK

Namen najine naloge je bil s pomočjo permutacij raziskati japonsko igrico Amida. Hoteli sva ugotoviti, ali se lahko zgodi, da bi več igralcev dobilo isti dobitek, in ali obstaja sistem, po katerem bi lahko že na začetku ugotovili, kateri dobitek pripada kateremu igralcu. Dela sva se lotili sistematično. Za cilj sva si postavili tri hipoteze, od katerih sva eno potrdili, eno ovrgli in eno delno potrdili. V teoretičnem delu sva se najprej naučili, kaj so permutacije brez ponavljanja. Gre za razporejanje določenega števila elementov na enako število prostih mest. Pri tem sva ugotovili, da smo se o permutacijah že učili v prvem razredu osnovne šole (vendar jih nismo tako poimenovali), ko smo v nalogah morali npr. tri različne like razvrstiti na vse možne načine.

V osrednjem delu sva z metodo poskušanja ugotavljali, ali držijo hipoteze, ki sva si jih zastavili. Igrali sva se igrico. Vsakokrat sva na papir narisali toliko navpičnic, kot je igralcev, spreminjali pa sva število prečnih črt in njihovo medsebojno lego. Metoda je bolj primerna za raziskovanje manjšega števila permutacij. Odločili sva se, da igrico raziščeva na primerih dveh in treh igralcev. Za obravnavo večjega števila igralcev in s tem permutacij bi potrebovali algoritem ali računalniški program. Ta pa bi za naju in najino trenutno znanje matematike predstavljal prevelik problem. Zbrane podatke o rezultatih igranja igre sva analizirali in prikazali s pomočjo programov Geogebra in Microsoft Word.

Prvo hipotezo sva potrdili, saj se je v vseh primerih igranja igre vedno zgodilo, da je vsak igralec dobil natanko en dobitek.

Druge hipoteze nisva potrdili, saj se pri igri zgodi, da igralci dobijo tisti dobitek, ki je napisan pod njihovim imenom.

Tretjo hipotezo pa sva delno potrdili. Pri dveh igralcih lahko točno določimo, kateri dobitek bo dobil igralec, če preštejemo prečne črte. Ugotavljava, da pri sodem številu prečnih črt igralca dobita dobitek, napisan pod njunim imenom, pri lihem številu prečnih črt pa ne. Pri treh igralcih ne moremo točno določiti, kaj kdo dobi. Lahko se le omejimo na tri možnosti izmed šestih. Tako se pri lihem številu prečnih črt zgodi, da bo vedno eden od igralcev dobil nagrado napisano pod njegovim imenom. Pri sodem številu prečnih črt pa je možnost, da vsi dobijo nagrado, napisano pod svojim imenom, ali pa da nihče ne dobi takšne nagrade.

Ob pisanju raziskovalne naloge sva se naučili in spoznali veliko novega. V primeru dveh in treh igralcev sva lahko zapisali tudi posplošitve. Zanimivo bi bilo videti, kaj se dogaja pri večjem številu igralcev. Ali bi tudi tam lahko prišli do kakšnih podobnih ugotovitev? To je vprašanje, ki ponuja možnosti za nova raziskovanja, seveda s pomočjo drugačnih metod.

4. 1 Družbena odgovornost

Amida je družabna igra, ki jo lahko uporabimo za izmenjavo predmetov, igrač ali loterijo. Ko smo se igrico igrali v šoli, nismo verjeli, da bo vsak dobil natanko eno darilo. Ampak kakorkoli smo zamenjali vrstni red igralcev ali daril in risali različno število prečnih črt, vedno je vsak med nami dobil eno. Nikoli se ni zgodilo, da bi jih več dobilo isto darilo, zato se niti spreti nismo mogli. To pa je tudi namen igre, da se sodelujoči nikdar ne sprejo in pravično razdelijo med seboj predmete. Pravzaprav se ob družabnih igrah učimo medsebojnih odnosov in pomena družbenih pravil. Igre spodbujajo sodelovanje. Učijo nas priznati poraz, se sprijazniti s tem, kar dobimo. Učijo nas upoštevanja pravil v igrah in življenju.

5 VIRI IN LITERATURA

5. 1 Knjižni viri

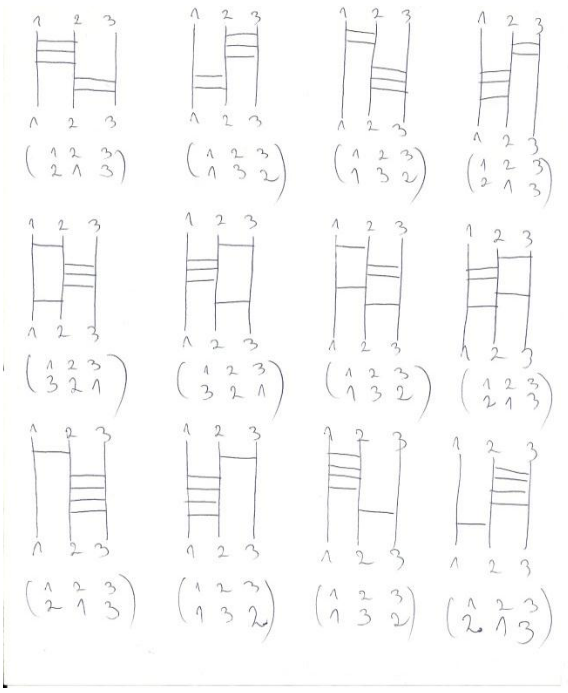
- Čibej, J. A. (1997). *Matematika. Kombinatorika • Verjetnostni račun • Statistika.* Ljubljana. Državna založba Slovenije.
- Kavka, D. (1997). *Matematika v srednji šoli. Pregled temeljne učne snovi in nalog srednješolske matematike.* Ljubljana. Modrijan založba, d.o.o.
- Šparovec, J. [et al.] (2004). *Tempus. Matematika za 4. letnik gimnazij.* Ljubljana. Modrijan založba, d.o.o.

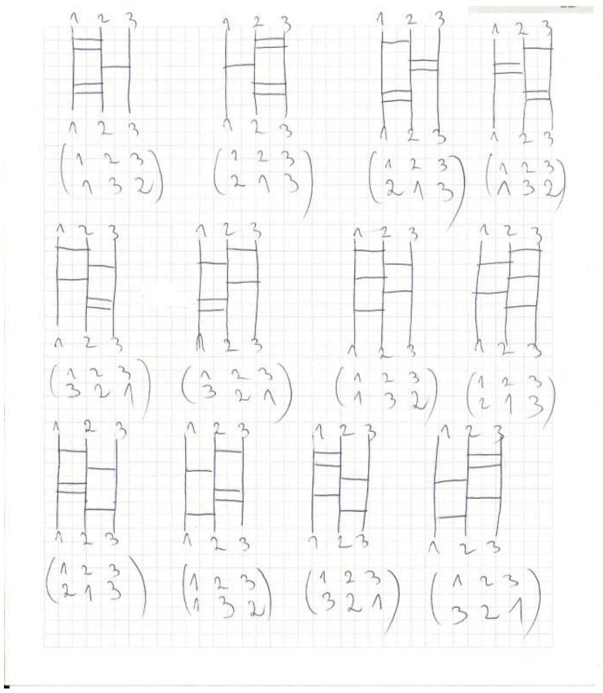
5. 2 Spletni viri

- *Amidakuji.* Spletna stran (pridobljeno 15. 10. 2015): https://en.wikipedia.org/wiki/Ghost_Leg
- *Japonska otroška igra amida.* Spletna stran (pridobljeno 15. 10. 2015): www.logika.si/sklop_logika/amida.pdf
- *Kombinatorika.* Spletna stran (pridobljeno 12. 12. 2015): http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/dira/kosenina/uvod.html
- *Kombinatorika.* Spletna stran (pridobljeno 12. 12. 2015): http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/topolovec/kombina.htm
- *Slika računalniške igrice.* Spletna stran (pridobljeno 10. 1. 2016): https://itunes.apple.com/us/app/isadari-the-ghost-leg/id357416104?mt=8

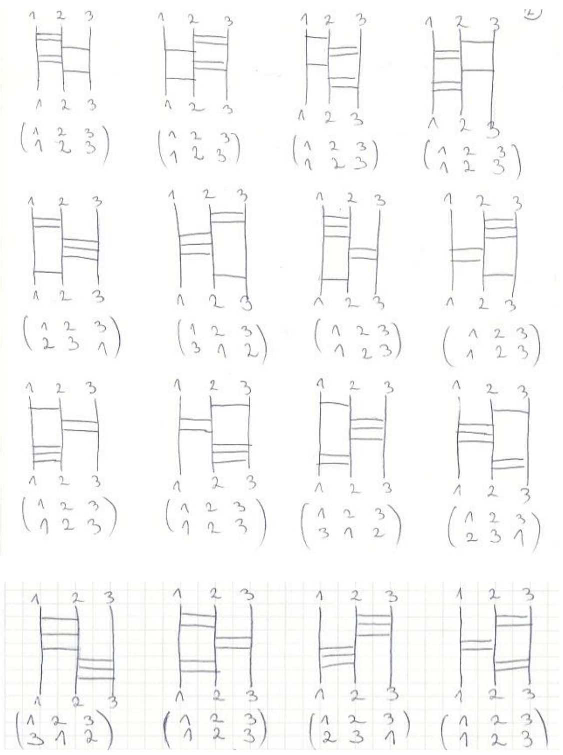
6 PRILOGE

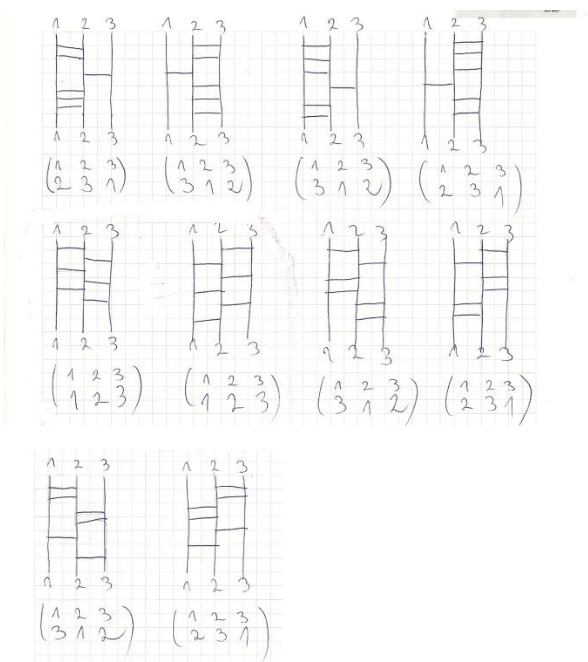
6. 1 Igra s tremi igralci in petimi prečnimi črtami



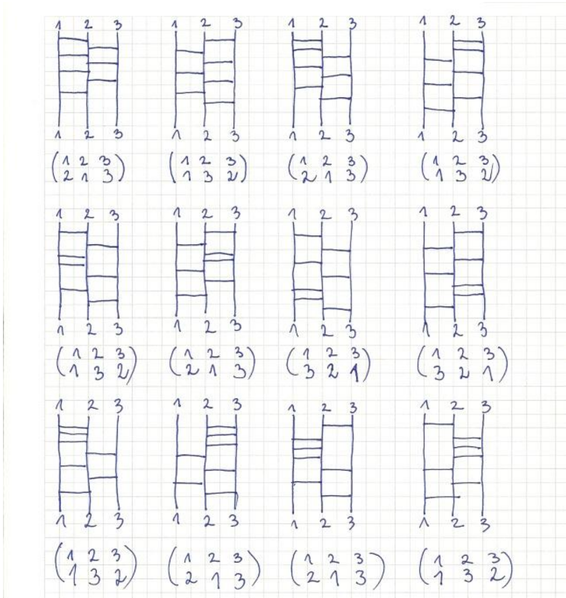


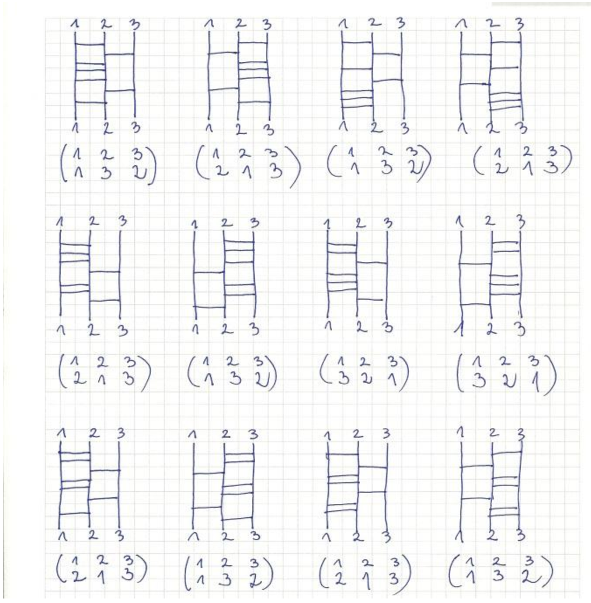
6. 2 Igra s tremi igralci in šestimi prečnimi črtami

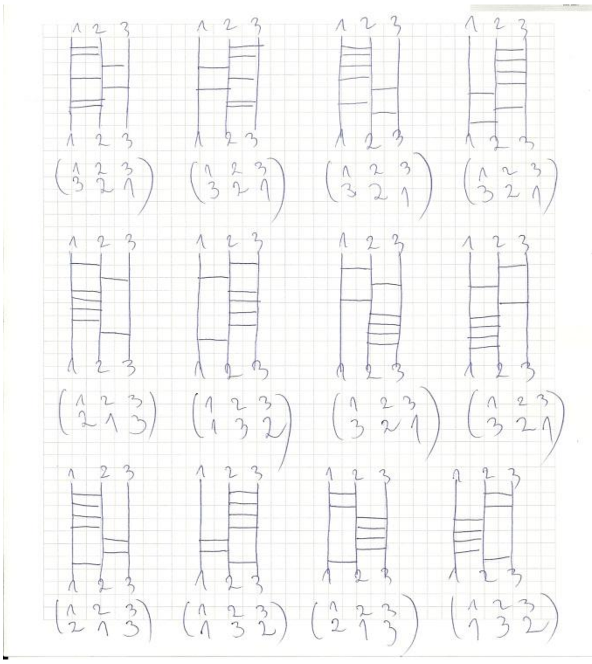


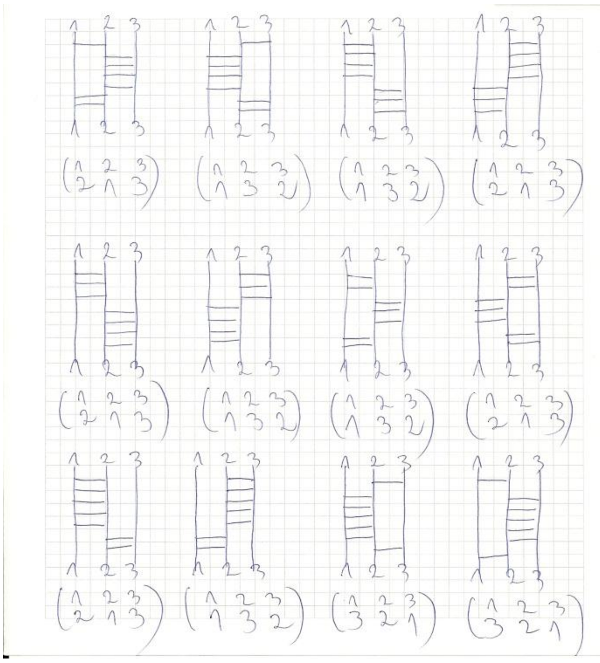


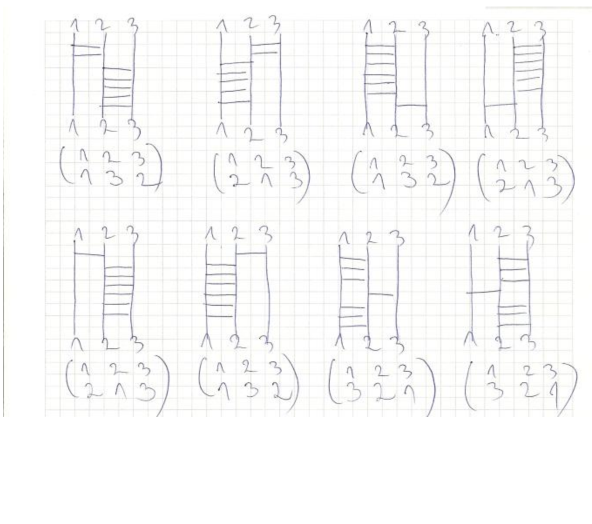
6. 3 Igra s tremi igralci in sedmimi prečnimi črtami

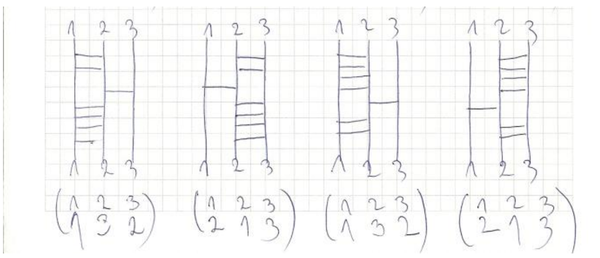












6. 4 Igra s tremi igralci in osmimi prečnimi črtami